Hoàng Thắng Lợi

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP II

Chương 7

THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

Các dạng chịu lực được nghiên cứu trong các chương trước: léo, nén đúng tầm uốn, xoắn thuần tuý và uốn ngang phẳng chỉ là những trường hợp chịu lực đơn giản.

Trong thực tế thường gặp các thanh chịu lực dưới những hình thức kết hợp của các trường hợp đơn giản. Được gọi là sự chịu lực phức lạp (trên mọi mặt cắt ngang của thanh đồng thời xuất hiện nhiều thành phần nội lực).

Ta thường gặp các dạng:

+Uốn xiên (M_x , M_y)

+Uốn + kéo, nén (N_z , M_x , M_y)

+Uốn + xoắn (M_u , M_z)

+Chịu lực tổng quát.

Giải quyết các bài toán này ta phải sử dụng nguyên lý độc lập cộng tác dụng.

Nôi dung nguyên lý:

Nêu trên một thanh đồng thời chịu tác dụng của nhiều lực thì nội lực hay ứng suất trong thanh là tổng nội lực hay ứng suất gây ra do tác dụng của riêng từng lực.

Để áp dụng nguyên lý này bài toán phải thoả mãn hai điều kiện:

- Vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tương quan giữa biến dạng và chuyển vị là bậc 1.

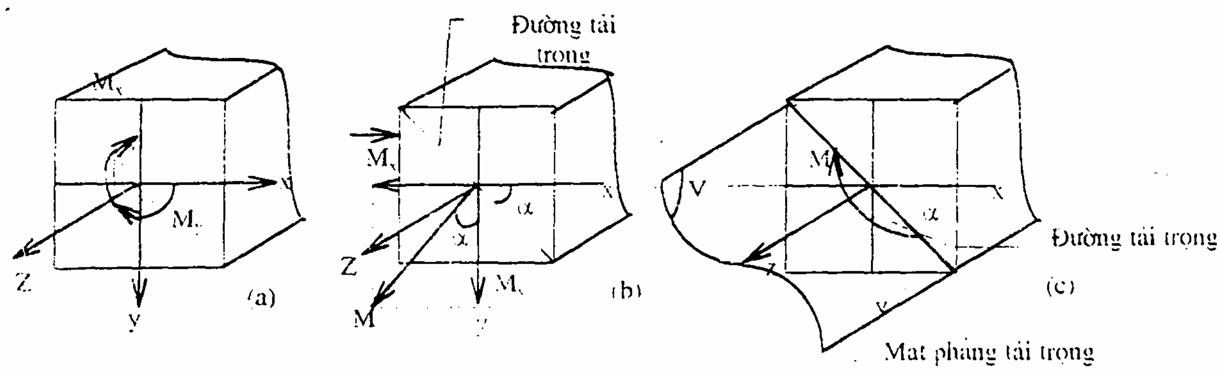
- Biến dạng của thanh là bé, sự dịch chuyển điểm đặt là không đáng kể. Các bài toán phức tạp bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

A. THANH CHỊU UỐN XIÊN

1. Định nghĩa:

một thanh chịu uốn xiên là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó có hai thành phán nội lực là mô men uốn Mx, Mỹ nằm trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt ta).

Chúng ta có thể biểu diễn các mô men uốn đó bằng các mô men vectơ: $\overrightarrow{Mx}$, $\overrightarrow{My}$, hợp các vectơ này sẽ được véctơ tổng vì (hình 7-16). Hợp M_x , M_y ta có mômen tổng M nằm trong mặt phẳng V (hình 7-1c) chứa trục Z mà không trùng mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào của mặt cắt. Mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng tải trọng, sao mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang gọi là đường tải trọng.



Như vậy ta có định nghĩa khác về uốn xiên như sau:

Thanh chịu uốn xiên là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần mômen uốn M_u nằm trong mặt phẳng chứa trục z nhưng không trùng với mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào.

Định nghĩa này giúp ta giải thích các thanh mặt cắt ngang hình tròn hoặc các đa giác nội tiếp trong đường tròn không chịu uốn xiên (5).

2- Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang:

Nếu gọi góc α là góc hợp bởi trục x và đường tải trọng. Nếu biểu diễn mômen uốn M_x , M_y là vectơ mômen thì ta có:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M\sin\alpha \\ M_y &= M\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Do vậy hệ số góc của đường tải trọng:

$$tg\alpha = \frac{M_x}{M_y} \qquad (7\text{-}1)$$

Dấu của các mômen uốn M_x , M_y quy ước như trường hợp thanh chịu uốn phẳng nghĩa là: M_x , M_y coi là dương nếu nó làm căng các thớ ở phía dương của trục x và y.

Theo nguyên lý độc lập tác dụng thì ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang bằng tổng ứng suất do riêng M_x gây ra (coi như không có M_y) và ứng suất pháp do riêng M_y (coi như không có M_x) gây ra như vậy ta đã đưa bài toán về hai trường hợp thanh chịu uốn thuần tuý. Do vậy công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ có toạ độ x, y trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên là:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \qquad (7.2a)$$

Trong thực tế tính toán để tránh phiền phức do phải để ý đến dấu của toạ độ x, y và M_x , M_y . Người ta thường dùng công thức kỹ thuật sau:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{J_x}.|y| \pm \frac{|M_y|}{J_y}|x| \qquad (7.2b)$$

Trong đó các giá trị đều lấy giá trị tuyệt đối còn lấy dấu cộng hay trừ phụ thuộc vào mômen uốn M_x , M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

Ví du l: Một dầm bằng gỗ dài 2m, mặt cắt ngang hình chữ nhật (12cm × 20cm). Dầm bị ngàm một đầu, một đầu tự do chịu lực tập trung P =2,4kN lực P đặt vuông góc trục dầm và xiên góc $\varphi = 30^o$ xác định vị trí đường tải trọng và ứng suất tại A, B, C, D.

Giải:

Phân lực P làm hai thành phần P_x , P_y :

$$P_x = P\sin\varphi = 2,4 . 0.5 = 1,2 \text{ kN}$$

$$P_y = P\cos\varphi = 2,4 . 0,866 = 2,08 \text{ kN}$$

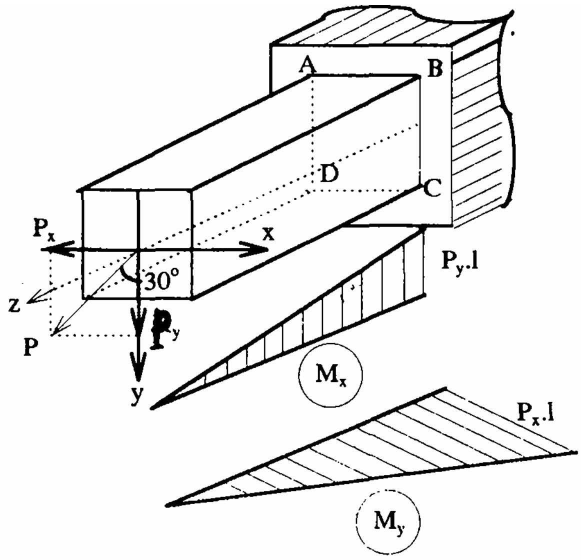
Trong đó mômen uốn M_x , M_y biểu diễn như hình vẽ.

Chiều của mômen M_x , M_y biểu diễn như hình vẽ.

Vị trí của đường tải trọng:

$$tg\alpha = \frac{M_x}{M_y} = \frac{-P_y.l}{P_x.l} = \frac{-2,08}{1,2} = -1,732$$

$$\alpha = -60^o$$



Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục x , y

$$* \ J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12.20^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4$$

$$* \ J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{12.20^3}{12} = 2880 \text{ cm}^4$$

Theo công thức (7.2a) ta có:

+ Ở điểm A:

$$\sigma_A = \frac{-P_y.1}{J_x}.y_A + \frac{P_x.1}{J_y}.x_A =$$

$$= \frac{-2{,}08.200}{8000}.(-10) + \frac{1{,}2.200}{2880}.(-6) = 0{,}82 =$$

$$= 0{,}52 - 0{,}5 = 0{,}02 \text{ kN/cm}^2$$

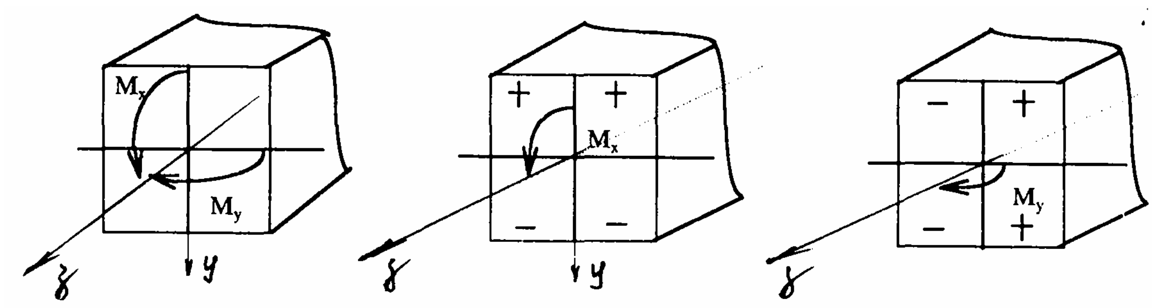
+ Ở điểm B:

$$\sigma_B = +0{,}52 + 0{,}50 = 1{,}02 \text{ kN/cm}^2$$

+ Ở điểm C: $\sigma_C = -\ 0{,}52 + 0{,}5 = -\ 0{,}02 \text{ kN/cm}^2$

+ Ở điểm D: $\sigma_D = -\ 0{,}52 - 0{,}52 = -\ 1{,}02 \text{ kN/cm}^2$

Nếu dùng công thức kỹ thuật ta phải xét dấu của các mômen uốn M_x , M_y.



Tính theo công thức (7.2b) thì:

$$\sigma_A = +\frac{416}{8000}.10 - \frac{240}{2800}.6 = 0{,}02 \text{ kN/ cm}^2$$

3- Điều kiện bên dầm chịu uốn xiên.

Để thiết lập điều kiện bền trước hết phải tìm điểm nguy hiểm (nằm trong mặt cắt ngang nguy hiểm) và tính ứng suất tại những điểm nguy hiểm đó. Muốn vậy ta phải dựa vào biểu đồ M_x , M_y, nhưng nhiều khi việc tìm mặt cắt ngang nguy hiểm không dễ dàng vì M_x và M_y không cùng đạt giá trị cực trị vì vậy phải xác định (σ_{max} , σ_{min}) trên mỗi mặt cắt so sánh để tìm ứng xuất cực trị.

Những điểm có ứng xuất cực trị là những điểm cách xa đường trung hoà nhất.

$$\sigma_{max} = \frac{|M_x|}{J_x}.|y^{max}{}_k| + \frac{|M_y|}{J_y}.|x^{max}{}_k|$$

$$\sigma_{min} = -\left[\ \frac{|M_x|}{J_x}.|y^{max}{}_n| + \frac{|M_y|}{J_y}.|x^{max}{}_n| \right. \qquad (7.4)$$

Trong đó: - x_k , y_k toạ độ điểm chịu kéo cách xa đường trung tâm

- x_n , y_n toạ độ điểm chịu nén cách xa đường trung tâm.

Trạng thái ứng suất ở những điểm này là trạng thái ứng suất đơn.

Đối thanh vật liệu dòn vì

$$[\sigma_k] < [\sigma]_n$$

nên: $$\sigma_{max} \le [\sigma]_k \qquad (7\text{-}5a)$$

$$|\sigma_{min}| \le [\sigma]_n \qquad (7\text{-}5b)$$

Với thanh vật liệu dẻo vì $[\sigma_k] \approx [\sigma]_n$ vậy

$$\max|\sigma| \le [\sigma]_k \qquad (7\text{-}6)$$

Nếu hai trục quán tính chính trung tâm là đối xứng thì:

$$|x^{max}{}_k| = |x^{max}{}_n| \ ; \qquad |y^{max}{}_k| = |y^{max}{}_n|$$

Vậy $$\sigma_{max} = |\sigma_{min}|$$

Trường hợp đặc biệt: thanh có tiết diện chữ nhật chữ I hay chữ C ghép thì:

(⊏ ⊐)

$$|x_k| = |x_n| = x_{max}$$

$$|y_k| = |y_n| = y_{max}$$

Vậy: $$\sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

Trong đó: $$W_x = \frac{J_x}{|y_{max}|} \ ; \quad W_y = \frac{J_y}{|x_{max}|}$$

Với trường hợp này điều khan bền:

- Nếu thanh vật liệu dòn:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]_k \qquad (7.7)$$

- Nếu thanh là vật liệu dẻo:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma] \qquad (7.8)$$

Qua điều kiện bền ta có ba bài toán cơ bản:

- Kiểm tra bền;
- Chọn tải trọng cho phép;
- Chọn kích thước.

Riêng bài toán chọn kích thước có nhiều đại lượng chưa biết:

J_x , J_y , X_n , X_x, Y_n , Y_x ,

Vậy ta biến đổi công thức kiểm tra:

$$\frac{1}{W_x}\left(M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y \right) \le [\sigma]$$

Chọn trước $\frac{W_x}{W_y}$ - với hình chữ nhật $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b}$

- ⊏ chọn 5 ÷ 7
- I chọn 8 ÷ 10

Ví du 2:

Cho một thanh thép mặt cắt chữ I, chọn số hiệu NoI biết vật liệu có

$[\sigma] = 16$ kN/cm^2 và P = 11 kN.

Giải: Phân P làm hai thành phần P_x và P_y .

Tại máy cắt ngàm ta có:

$M_x = - P_y . l = - 11 \cos 20^o . 1,2$

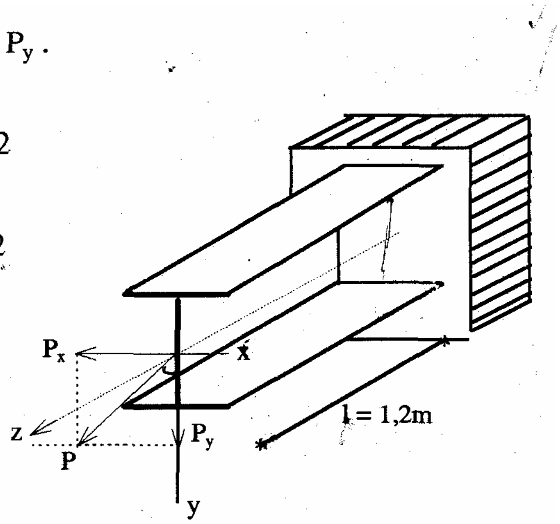
$= - 12,4$ kNm.

$M_y = - P_x . l = - 11\sin 20^o . 1,2$

$= - 4,51$ kNm.

Tra bảng chọn $\frac{W_x}{W_y} = 10$

Vậy theo điều kiện bền:



$$W_x = \frac{1}{[\sigma]}\left[|M_x| + \frac{W_x}{W_y}.|M_y|\right] = \frac{1}{16}\,[12{,}4\,.\,10^2 + 10\,.\,4{,}51\,.\,10^2]$$
$$= 360\ cm^3$$

Dựa vào kết quả này chọn I N o 27 tra bảng có: $W_x = 371cm^3$, W_y=41,5cm^3 thử lại điều kiện bền.

$$\sigma_{max} = \frac{12{,}4.10^2}{371} + \frac{4{,}51.10^2}{41{,}5} = 14{,}2\ kN/\ cm^3 < [\sigma] = 16$$

So sánh thấy σ_{max} nhỏ hơn nhiều so với [σ] vậy chọn I số 24a có:W_x = 317 cm^3; W_y = 41,6 cm^3.

Khi đó:

$$\sigma_{max} = \frac{12{,}4.10^2}{317} + \frac{4{,}51.10^2}{41{,}6} = 14{,}7\ kN/\ cm^3$$

vậy chọn I 24a.

4- Độ võng của dầm chịu uốn xiên.

Gọi f_x , f_y là độ võng theo phương của các trục quán tính chính trung tâm, x, y do M_x, M_y gây ra thì độ võng toàn phần bằng tổng hình học của các độ võng f_x , f_y giá trị của nó.

$$f = \sqrt{f^2{}_x + f^2{}_y}$$

Trong đó: - f_x , f_y được xác định giống chương uốn ngang phẳng thanh thẳng.

5- Đối với thanh có mặt cắt ngang hình tròn.

Với mặt cắt ngang hình tròn vì trục nào đi qua tâm cũng là trục quán tính chính trung tâm vì vậy thanh không chịu vốn xiên:

Vậy: $$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_u} = +\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u}$$

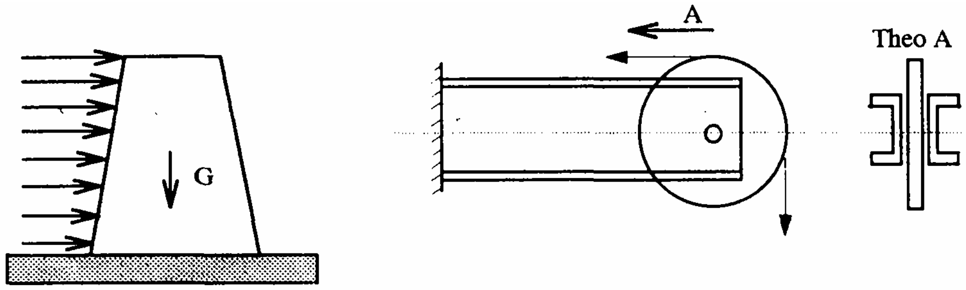
$$\sigma_{min} = -\frac{M_u}{W_u} = -\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u}$$

Trong đó: $W_x = W_y = W_u$

B. THANH CHỊU UỐN ĐỒNG THỜI KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

1. Định nghĩa.

Thanh chịu uốn + kéo nén đồng thời là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực là các mômen uốn M_x, M_y Và lực dọc N_z .



2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang.

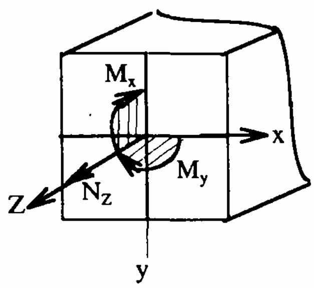
Giả sử trên mặt cắt ngang nào đó của thanh chịu uốn đồng thời với kéo (nén) có các thành phần nội lực M_z , M_y , N_z , (hình vẽ).

Theo nguyên lý độc lập tác dụng:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x}.y + \frac{M_y}{J_y}.x + \frac{N_z}{F} \qquad (7\text{-}9)$$

hay:

$$\sigma = \frac{\pm|M_x|}{J_x}.|y| \pm \frac{|M_y|}{J_y}.|x| \pm \frac{N_z}{F}$$



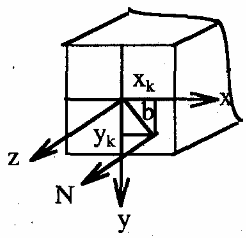
Chọn dấu tương tự uốn xiên.

3- Trường hợp riêng của bài toán uốn + kéo nén đúng tâm là bài toán kéo nén lệch tâm:

a) Đinh nghĩa: Một thanh chịu kẻo nén lệch tâm khi ngoại lực thu về một lực N không trùng với trục thanh nhưng song song trục thanh.

$M_x = N \cdot y_k$

$M_y = N \cdot x_k$



Vậy ta có thể hoàn toán áp dụng được công thức tính toán uốn + kéo nén đồng thời.

$$\sigma = \frac{N.y_k}{J_x}.y + \frac{N.x_k}{J_y}.x + \frac{N}{F}$$

Nếu đặt: $i^2_x = \frac{J_x}{F}$; $i^2_y = \frac{J_y}{F}$ (7.10)

Thì: $\sigma = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{y_k . y}{i^2_x} + \frac{x_k . x}{i^2_y}\right)$ (7.11)

Trong đó: - i_x , i_y là bán kính quán tính.

4- Kiểm tra bền.

- Vật liệu dòn: $\sigma_{max} \le [\sigma]_k$; $|\sigma_{min}| \le [\sigma]_n$
- Vật liệu dẻo: $|\sigma_{max}| \le [\sigma]_k$

Nếu các thanh dạng mặt cắt là CN, I,⊏⊐ thì :

$$\sigma_{max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|N_z|}{F} \le [\sigma]$$

$$\sigma_{min} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \pm \frac{|N_z|}{F} \le [\sigma]$$

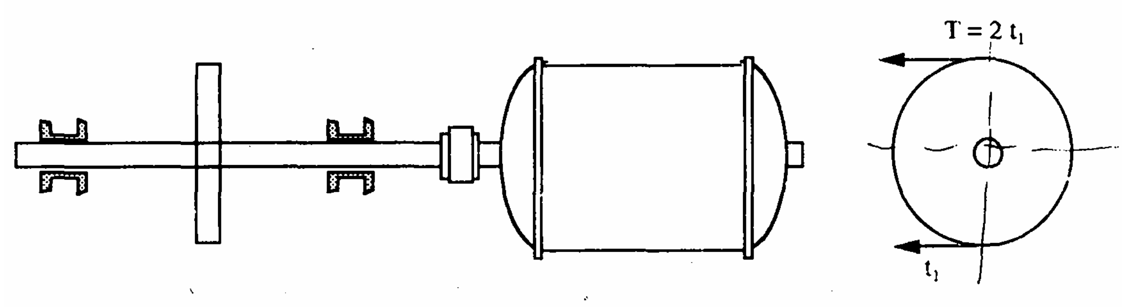
C. THANH CHỊU UỐN + XOẮN

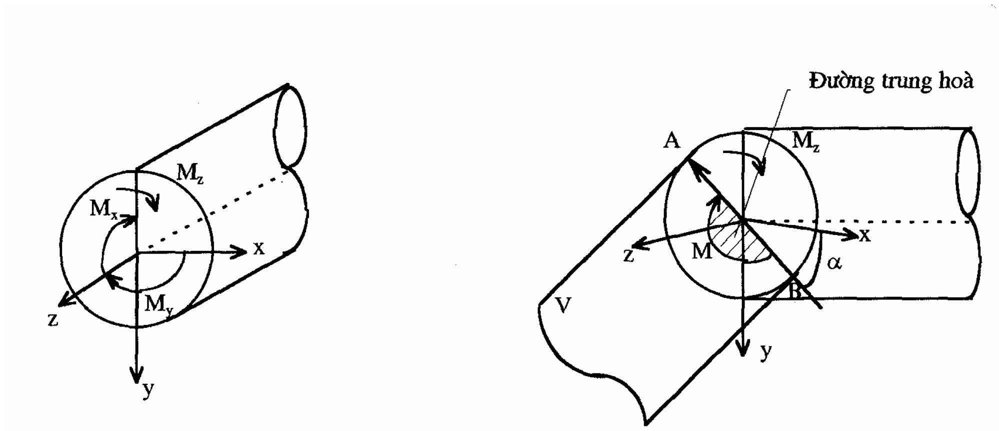
I. THANH MẶT CẮT NGANG HÌNH TRÒN:

1- Định nghĩa:

Thanh chịu uốn đồng thời với xoắn là thanh chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó có các thành phần mô men uốn M_x , M_y và mômen xoắn M_z .

Ví du: Trục truyền lực chịu mômen xoắn và chịu mô men uốn do trọng lượng bản thân, trọng lượng puli và lực căng đai.





Nếu hợp các thành phần mômen uốn M_x, M_y ta sẽ được mômen uốn toàn phần.

$$M_v = \sqrt{M^2_x + M^2_y} \qquad \text{(a)}$$

Mặt phẳng v cũng là mặt phẳng quán tính trung tâm của mặt cắt ngang. Như vậy ta kết luận thanh chịu uốn thuần tuỳ + xoắn thuần tuý. Các điểm A và B là điểm cách xa đường ϕ hoà nhất. Ứng suất pháp tại các điểm này.

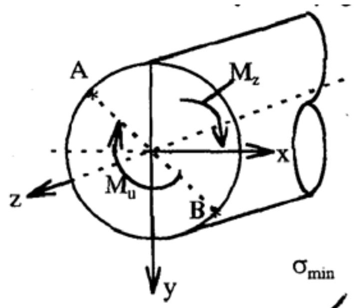
$$\sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \frac{|M_v|}{W_u} \qquad \text{(b)}$$

W_u - mômen chống uốn đối với đường trung hoà.

Những điểm trên chu vi của mặt cắt ngang là những điểm có ứng xuất tiếp lớn nhất do mômen xoắn gây ra và bằng.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_x} \qquad (c)$$

Như vậy ở các điểm A, B ngoài ứng xuất pháp lớn nhất do uốn còn có ứng xuất tiếp lớn nhất do xoắn gây ra trạng thái ứng xuất của phân tố ở các điểm này là trạng thái ứng xuất phẳng. Điều kiện bền của các phần tố này là:



- Theo thuyết bền ứng xuất tiếp lớn nhất.

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

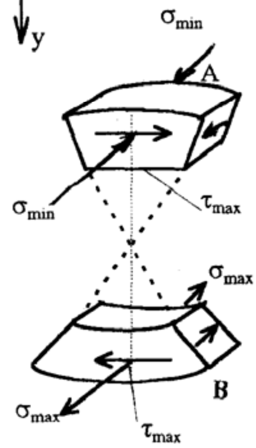
Mang (b) (c) và kể đến (a) ta có:

$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_x}\sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z} \le [\sigma]$$

- Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng;

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Hay $$\sigma_{td} = \frac{1}{W_x}\sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + 0{,}75M^2{}_z} \le [\sigma]$$



- Theo thuyết bền M_o,

$$\sigma_{td} = \frac{1-\alpha}{2}.\sigma + \frac{1+\alpha}{2}.\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

Hay:

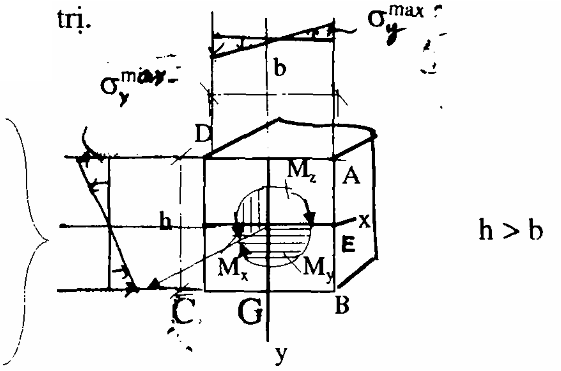
$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_x}\left[\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z}\right] \le s\,[\sigma]$$

II. TIIANH MẶT CẮT NGANG HÌNH CHỮ NHẬT:

Giả sử trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn đồng thời với xoắn có các thành phần M_x , M_y , M_z . Đối với hình chữ nhật ứng xuất phát sinh lớn nhất ở các điểm góc với hình vẽ là điểm ác có ứng suất pháp cực trị.

$$\sigma_A = \sigma_{max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

$$\sigma_C = \sigma_{min} = -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

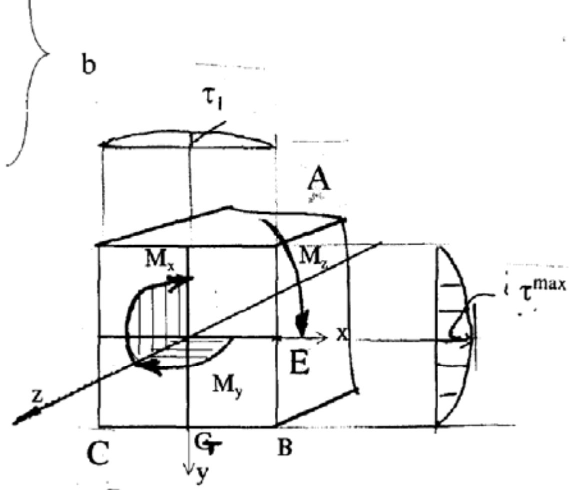


h > b

Ngoài ứng xuất pháp trên mặt cắt ngang còn có ứng xuất tiếp do xoắn gây ra, điểm E (giữa cạnh dài) và điểm G điểm giữa cạnh ngắn có ứng xuất tiếp lớn nhất và ứng xuất tiếp tương đối lớn.

$$\tau_E = \tau_{max} = \frac{|M_z|}{W_{xoắn}}$$

$$\tau_G = \gamma\, \tau_{max} = \gamma \frac{|M_z|}{W_{xoắn}}$$

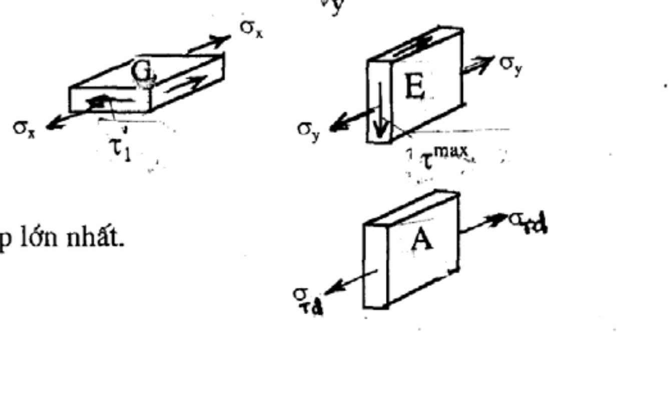


Trong ba điểm A,E,G chưa biết điểm nào là điểm nguy hiểm vậy ta phải tính cho cả ba điểm A,E,G

- Đối với phân tố ở điểm A

Vì trạng thái ứng xuất ở A là trạng thái ứng xuất đơn do vậy:

$$\sigma_{td}(A) = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$



- Đối với phân tố ở điểm E

+ Theo thuyết bền ứng xuất tiếp lớn nhất.

$$\sigma_{td}(E) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

+ Theo thuyết bền TN BĐ HD:

$$\sigma_{td}(E) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

+ Theo thuyết bền M_o:

$$\sigma_{td}(E) = \frac{1-\alpha}{2}\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

- Đối với phân tố ở G

+ Theo thuyết bền ứng xuất TLN:

$$\sigma_{td}(G) = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z\gamma}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

+ Theo thuyết TBTN BĐHD:

$$\sigma_{td}(G) = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z\gamma}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

+ Theo thuyết Mo:

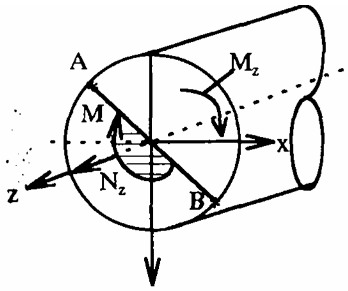
$$\sigma_{td}\,G = \frac{1-\alpha}{2}\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z\gamma}{W_{xoắn}}\right)^2}$$

D. THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT.

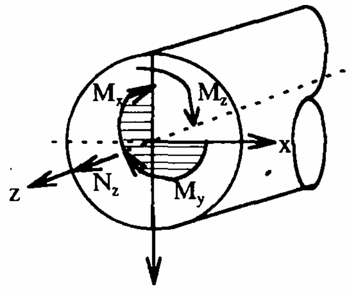
I. THANH MẶT CẮT NGANG HÌNH TRÒN:

1. Định nghĩa:

Một thanh chịu lực tổng quát là thanh chịu lực sao cho trên mặt cắt ngang có đầy đủ 6 thành phần nội lực, (vì lực cắt không đáng kể do vậy còn 4 thành phần nội lực) là: M_x, M_y, M_t , N_z (hình 2).



H-1



H-2

Vì ứng xuất pháp do lực dọc N_z gây ra là đều và bằng $\frac{Nz}{F}$ do vậy cũng như thanh mặt cắt ngang tròn chịu uốn đồng thời xoăn. Các điểm nguy hiểm vẫn là các điểm A và B.

$$\sigma_{max} = \frac{|M_u|}{W_x} \pm \frac{N_z}{F}$$

$$\sigma_{min} = \frac{|M_u|}{W_x} \pm \frac{N_z}{F}$$

Ở các điểm này ngoài ứng xuất pháp cực trị còn có ứng xuất tiếp max do mômen xoắn gây ra.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_P}$$

Tuỳ theo thuyết bền sử dụng mà ta viết điều kiện bền cho các phân tố ở hai điểm A và B.

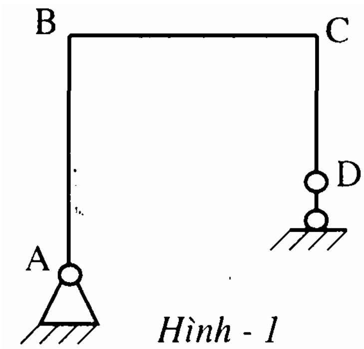
Chương 8

HỆ THANH SIÊU TĨNH

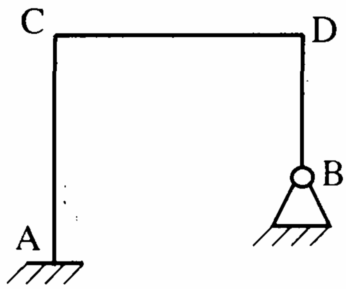
il - MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chương này ta chỉ xét đến bài toán phẳng. Mọi di động của hệ chỉ trong mặt phẳng chứa hệ, vậy hệ có 3 bậc tự do (hai chuyển động tịnh tiến và một chuyển động quay trong mặt phẳng của hệ). Để cố định hệ ta cần 3 liên kết đơn hợp lý. Số phương trình cân bằng tĩnh học là vừa đủ để xác định các phản lực trong các liên kết đó. Bài toán này gọi là bài toán tĩnh định (Hình 1). Nếu số liên kết nhiều hơn số liên kết để giữ cho hệ cố định thì đó là bài toán siêu tĩnh.

Ví du: Hình 2 xét để hệ cố định thì chỉ cần ngàm tại A, liên kết kép tại B làm tăng độ cứng vững của hệ, song để xác định các phản lực liên kết phải cần có 5 phương trình vì có 5 ẩn số là các phản lực liên kết. Điều này cho thấy phải tìm thêm 2 phương trình nữa thì mới giải được bài toán. Không có cách nào khác là phải dựa vào điều kiện chuyển vị và biến dạng của hệ để thiết lập phương trình này.



Hình - 1

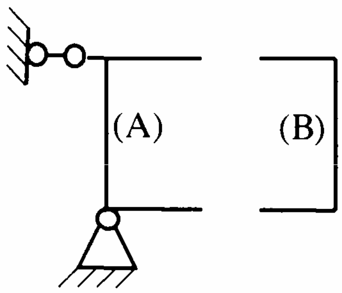


Hình - 2

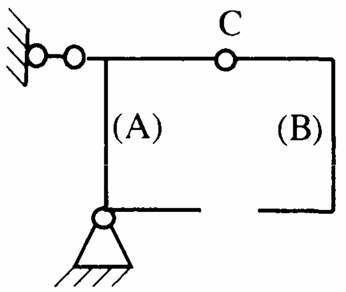
Số liên kết thừa chính là số bậc siêu tĩnh của hệ và có bao nhiêu liên kết thêm thì cần có bấy nhiêu phương trình để giải hệ. Xét ví dụ H-2 ta thấy hệ có 2 bậc siêu tĩnh.

Các liên kết trên đây gọi là liên kết ngoại chúng được nối với trái đất hay một hộ cố định khác.

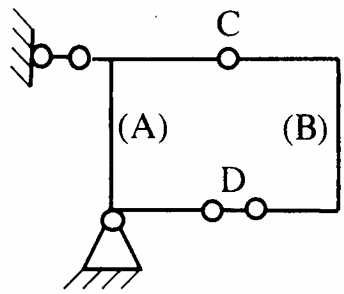
Tương tự ta có thể xét liên kết giữa các phần trong một hệ. Ví dụ xét 2 hệ A và B (Hình 3) giả sử (A) là cố định thì (B) và (A) có 3 bậc tự do.



Hình - 3



Hình - 4

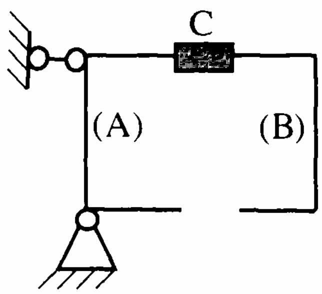


Hình - 5

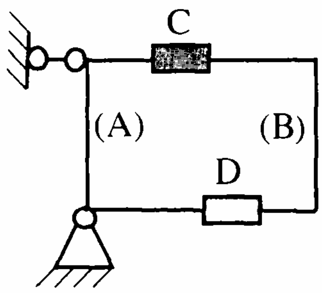
Gắn (B) vào (A) bằng một khớp cầu ở (C) thì (B) chỉ còn quay quanh (A) ở C, để (B) cố định với (A) thì ta gắn thêm một gối di động tại D (Hình 3,4,5).

Vậy số liên kết gắn phần này với phần kia của một hệ cũng là 3 liên kết đơn. Ta, cũng có thể gắn (B) vào (A) bằng một mối hàn tại C (Hình 6) vì một mối hàn tương đương với 3 liên kết đơn.

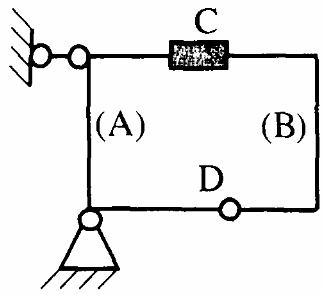
Tại D ta thêm một mối hàn hay một khớp cầu cho tá hệ thừa 3 hoặc 2 liên kết .



Hình - 6



Hình - 7



Hình - 8

Những liên kết giữa các phần của một hệ gọi là siêu tĩnh nội

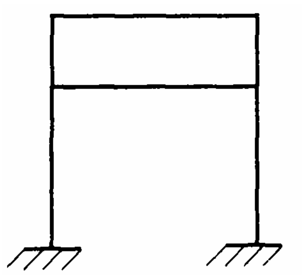
Nhận xét :

- Một chu vi khép kín có ba bậc siêu tĩnh.

- Nếu trong chu vi đặt một khớp nối đơn nối hai thanh (H-8) thì bậc siêu tĩnh giảm đi một.

- Nếu đặt 3 khớp đơn thì giảm hết bậc siêu tĩnh (3 khớp đơn không thẳng hàng).

- Một hệ có thể vừa siêu tĩnh nội vừa siêu tĩnh ngoại và số bậc siêu tĩnh bằng tổng số bậc siêu thử nội và ngoại (H.9).



Hình - 9

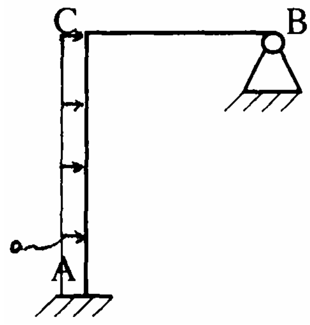
i2 - TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Để giải một bài toán siêu tĩnh (tính chuyển vị, vẽ biểu đồ nội lực...) người ta xây dựng một hệ tĩnh định tương đương hệ siêu tĩnh, có nghĩa là hệ TĐTĐ phải có biến dạng, chuyển vị và cách làm việc giống hệ siêu tĩnh hoàn toàn. Khi đó việc tính chuyển vị hay nội lực của hệ siêu tĩnh được thay bằng tính trên hệ TĐTĐ. Vậy vấn

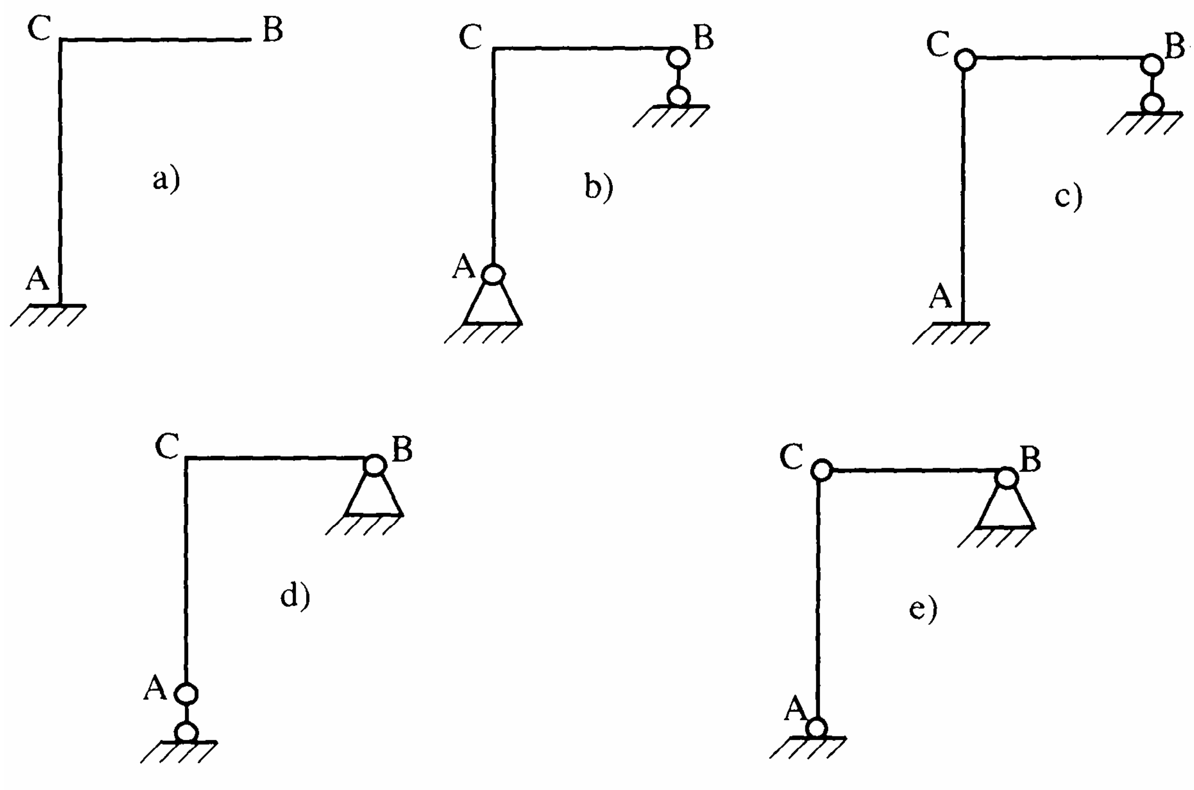
đề là ta phải xây dựng một hệ tĩnh định tương đương.

Để xây dựng một hệ tĩnh định tương đương ta phải làm như sau:

a. Chọn hệ cơ bản.



Một hệ cơ bản là một hệ tĩnh định suy ra từ hệ siêu tĩnh bằng cách bỏ bớt liên kết. Ví dụ với hệ siêu tĩnh đã cho ta có thể chọn một trong các hệ cơ bản như trên hình 10.



Hình - 10

Hệ a - ta đã bỏ 2 liên kết tại B.

Hệ b - ta bỏ một liên kết tại A và một liên kết tại B.

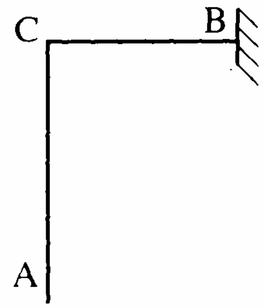
Hệ c - ta bỏ một liên kết nội tại C và một liên kết ngoại tại B.

Hệ d - ta đã bỏ 2 liên kết tại A.

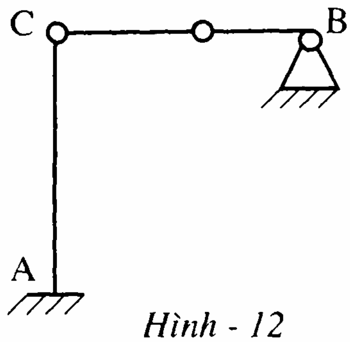
Hệ e - ta đã bỏ 2 liên kết nội tại A và C.

Chú ý: Ta chỉ có quyền bỏ bớt liên kết chứ không được thêm vào. Ví dụ với hệ trên hình 11 không phải là hệ cơ bản của hệ siêu anh đã cho vì tại B ta đã thêm vào một liên kết.

Dĩ nhiên khi bỏ bớt các liên kết ta phải tránh để cho hệ trở thành một hệ biến hình hoặc biến hình tức thời. Ví dụ hệ trên hình 12 ta đã bỏ 2 liên kết nội trên đường CB và như vậy ta có một hệ có 3 khớp thẳng hàng, hệ đó là một hệ biến hình tức thời và không thể trở thành một hệ cơ bản được.



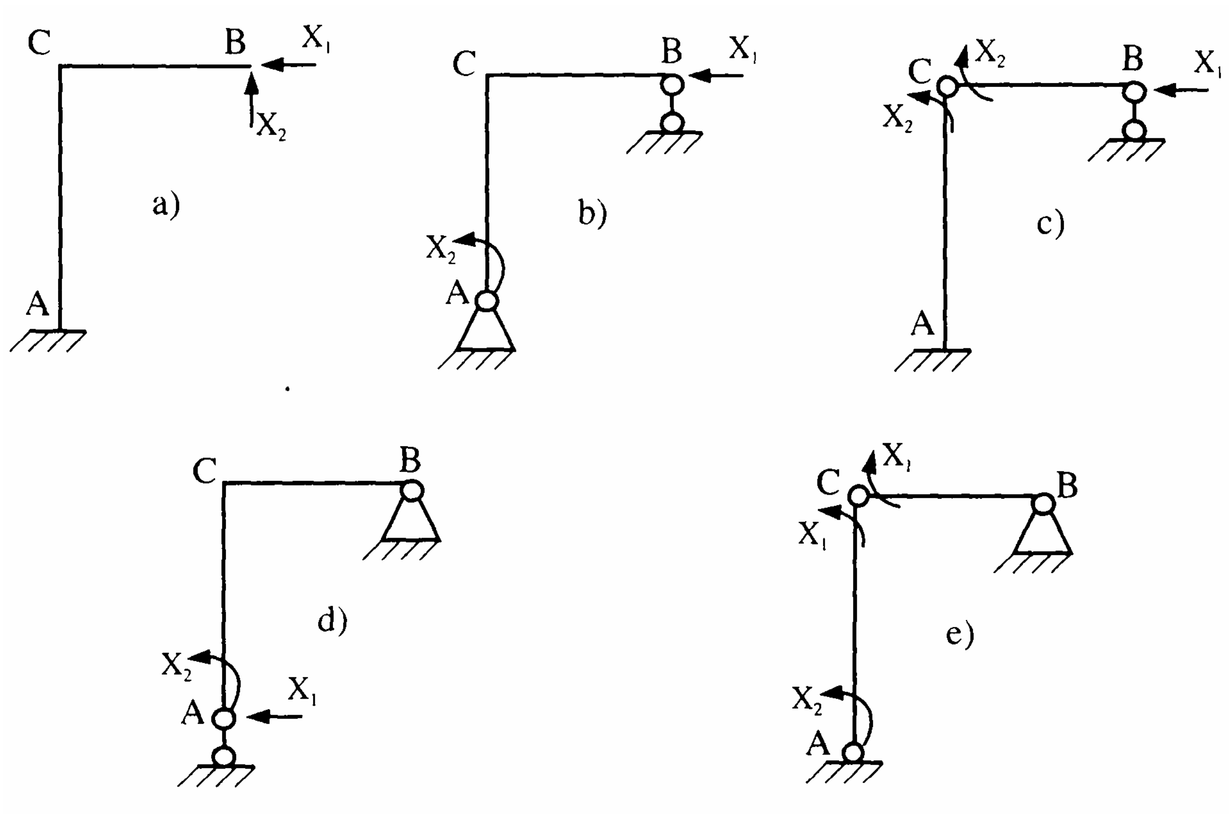
Hình - 11



Hình - 12

<u>*b. Thiết lập hệ tĩnh định tương đương*</u>

Đặt các lực liên kết vào những nơi liên kết đã bị bỏ đi (H.13).



Hình - 13

Hệ a: Liên kết B tạo nên 2 thành phần phản lực theo 2 phương. Do đó khi bỏ liên kết ta phải đặt vào các phản lực theo 2 phương để thay thế.

Hệ b: Ta đã thay ngàm A bằng một gối tựa cố định vậy ta phải thêm một mômen để liên kết tương đương với ngàm A. Tại B ta phải đặt thêm một thành phần phản lực ngang để tương đương với khớp cố định B.

Hệ c: Tại C khi thay khớp vào có nghĩa là ta đã bỏ đi thành phần mômen uốn liên kết giữa các thanh, vì vậy để tương đương như cũ ta phải đặt các mômen đó 2 bên khớp C. Tại B phải đặt thêm các thành phần phản lực ngang.

Hệ d: Tại A ta phải đặt thêm một mômen và một phản lực ngang thì liên kết đó mới tương đương liên kết ngàm tại A.

Hệ e: Ta phải đặt các mômen liên kết X_1 và X_2.

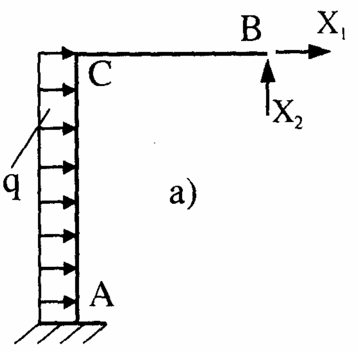
Đặt tải trọng lên hệ cơ bản đã chọn. Trị số của các phản lực liên kết được xác định từ điều kiện chuyển vị do tải trọng và do các phản lực liên kết gây nên theo các phương của phản lực liên kết phải bằng điều kiện chuyển vị thực của hệ siêu tĩnh. Ví dụ chọn hệ cơ bản a - đặt tải trọng lên hệ cơ bản đó (H. 14). Như vậy tải trọng và các phản lực X_1 , X_2 sẽ gây nên các chuyển vị theo phương thẳng đứng và phương ngang của B. Để hệ tương đương với hệ siêu tĩnh thì ta phải xác định được trị số của X_1 , X_2 sao cho các chuyển vị đó là bằng không. (Gối tựa cố định tại B của hệ số tĩnh không cho phép khung có chuyển vị theo phương ngang và phương thẳng đứng).

Sau khi đã xác định được trị số của X_1 , X_2 thì ta đã có được một hệ tĩnh định tương đương và bài toán được xem như là đã giải xong.

c. <u>Thiết lập hệ phương trình chính tắc.</u>

Gọi δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, là các chuyển vị đơn vị theo các phương X_1 và X_2, Như vậy chuyển vị theo các phương X_1, X_2 và tải trọng gây nên được tính theo các biểu thức:

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}$$
$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}$$



Hình - 14

Từ điều kiện $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ta có hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Từ hệ phương trình đó ta dễ dàng xác định được X_1 và X_2. Một cách tổng quát ta ký hiệu δ_{ij} là chuyển vị theo phương i do lực đơn vỉ theo phương j gây nên.

Tất cả những điều ta vừa nói trên đây có thể suy rộng cho một hệ siêu tĩnh bậc n khi đó hệ phương trình chính tắc sẽ có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0$$

Các hệ số δ_{n1} được gọi là hệ số chính. Các hệ số δ_{ij} được gọi là hệ số phụ và Δ_{ip} gọi là các số hạng tự do.

Phương pháp giải hệ siêu tĩnh như ta vừa trình bày, các ẩn số là các phản lực liên kết nên được gọi là các phương pháp lực.

d. <u>Trình tư giải hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực:</u>

+ Chọn hệ cơ bản.

+ Thiết lập hệ tĩnh định tương đương.

+ Lập hệ phương trình chính tắc.

+ Tính các hệ số của ẩn số và số hạng tự do.

+ Giải hệ phương trình tìm các X_i.

+ Đặt các giá trị X_i vào hệ TĐTĐ.

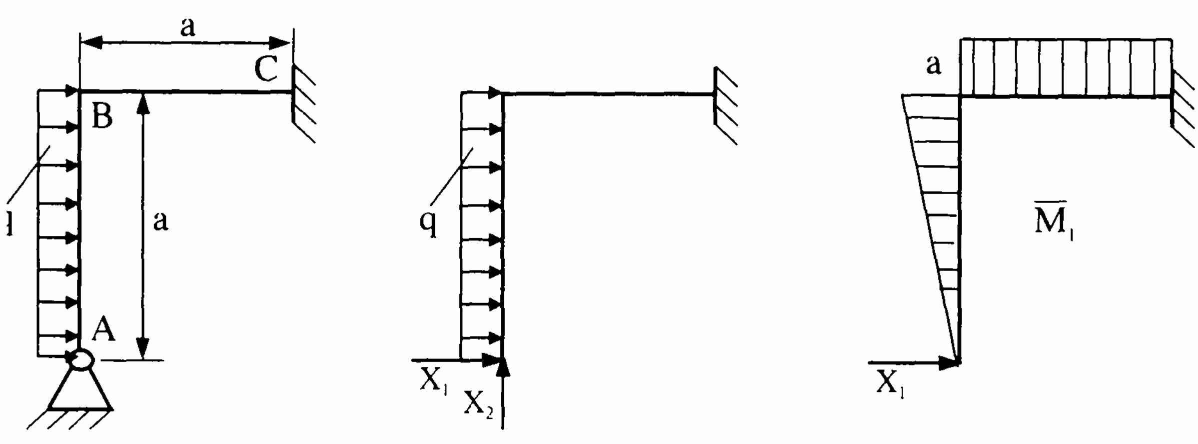
+ Vẽ biểu đồ M - N - Q.

+ Tìm chuyển vị.

e. Ví dụ:

Ví dụ 1 : Vẽ biểu đồ nội lực cho một khung như hình vẽ sau (hình a)

Bài giải: Khung có 2 bậc siêu tĩnh, hệ tĩnh định tương đương được chọn như hình b.



Hình - a *Hình - b* *Hình - c*

Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Biểu đồ mômen uốn do các phản lực đơn vị và tải trọng như hình vẽ.

Áp dụng phương nhân biểu đồ Vêrêsaghin ta có:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{a^2}{2}.\frac{2}{3}a + a^2.a\right) = \frac{4}{3}.\frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ}a.a.\frac{a}{2} = -\frac{1}{2EJ}.a^3$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}.\frac{a^2}{2}.\frac{2}{3}a = \frac{a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{3}.\frac{qa^2}{2}.a.\frac{3}{4}a + \frac{qa^2}{2}.a.a\right) = \frac{5qa^4}{8EJ}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{EJ}.\frac{qa^2}{2}.a.\frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ}$$

Thay vào phương trình chính tắc và rút gọn ta có:

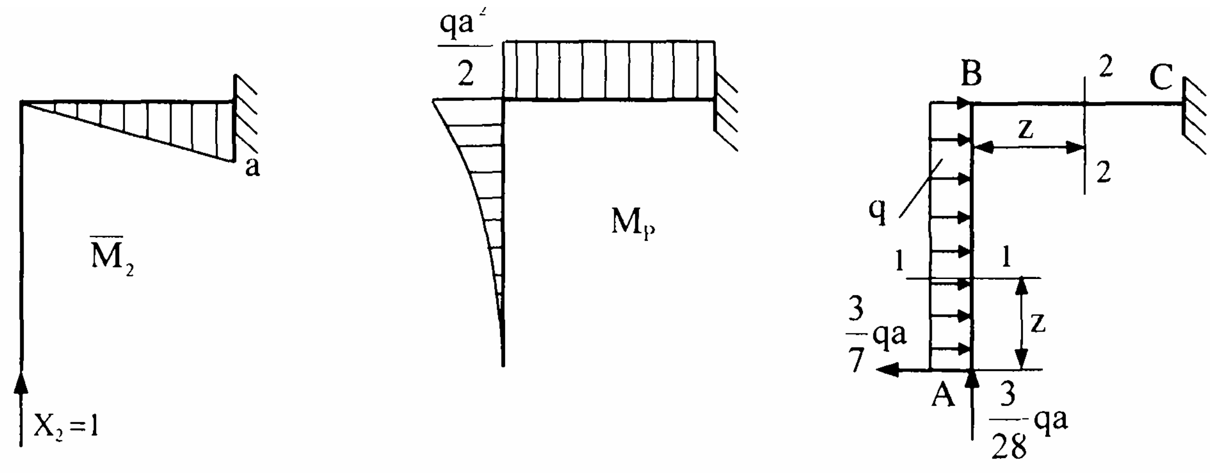
$$\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0$$

$$-\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0$$

Giải ra ta được:

$$X_1 = -\frac{3}{7}qa; \quad X_2 = \frac{3}{28}a$$

Vẽ biểu đồ M, N, Q ta đặt các lực X_1 và X_2 Vào hệ cơ bản và chú ý rằng lực X_1 có chiều ngược lại vì kết quả mang dấu âm (-) (Hình g)



Hình - d *Hình - e* *Hình - g*

- Biểu đồ mômen.

Đoạn AB (mặt cắt 1 - 1)

$$M_1 = \frac{3}{7}qaz - \frac{q}{2}z^2$$

Khi $z = 0$ $\quad M = 0$

$z = \frac{1}{2}a$ $\quad M_1 = \frac{3}{7}qa.\frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} = \frac{5}{56}qa^2$

$z = a$ $\quad M_1 = \frac{3}{7}qa.a - \frac{qa^2}{2} = -\frac{1}{14}qa^2$

Tính giá trị M_{1max}

$$\frac{dM_1}{dz} = \frac{3}{7}qa - qz = 0$$

Rút ra $\quad z = \frac{3}{7}a$

Do đó: $\quad M_{1max} = \frac{3}{7}qa.\frac{3}{7}.a - \frac{1}{2}.\frac{9}{49}qa^2 = \frac{9}{98}qa^2$

Đoạn BC (mặt cắt 2-2)

$$M_2 = \frac{3}{28}qa.z + \frac{3}{7}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2$$

Tại $z = 0$ $\quad M_2 = -\frac{1}{14}qa^2$

Tại $z = a$ $\quad M_2 = \frac{3}{28}qa^2 + \frac{3}{7}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{28}qa^2$

Biểu đồ lực cắt và lực dọc:

- Đoạn AB (mặt cắt 1 - 1)

$$Q_1 = \frac{3}{7}qa - qz$$

$$N_1 = -\frac{3}{28}qa$$

Tại $z = 0$ $\quad Q_1 = \frac{3}{7}qa$

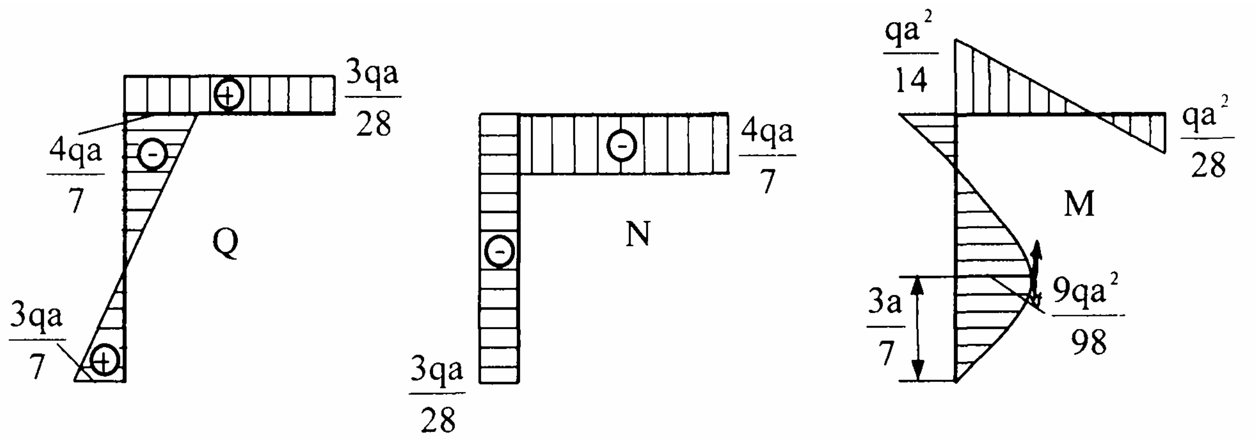
Tại $z = a$ $\quad Q_1 = -\frac{4}{7}qa$

- Đoạn BC (mặt cắt 2-2)

$$Q_2 = -\frac{3}{28}qa$$

$$N_2 = \frac{3}{7}qa - qa = -\frac{4}{7}qa$$

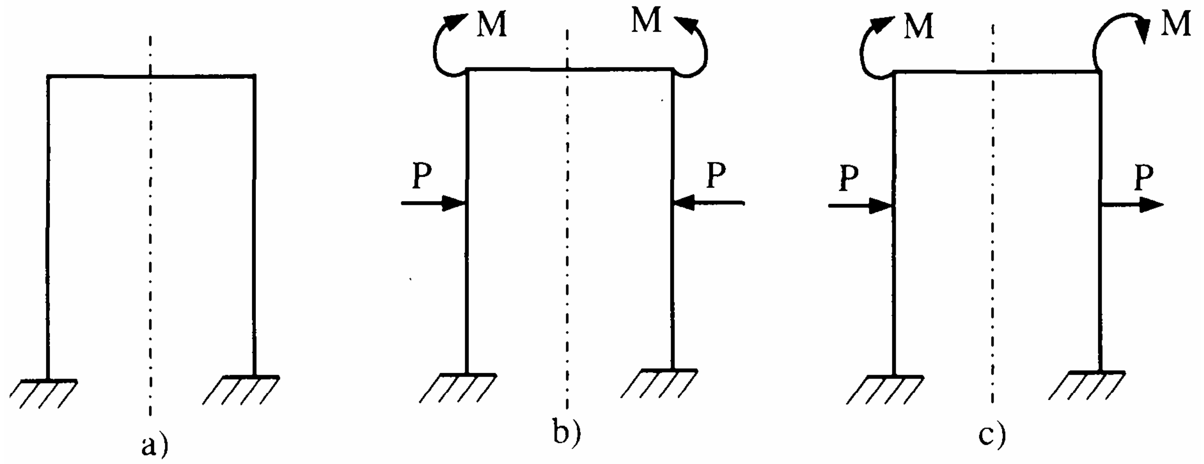
Biểu đồ M , Q và N như hình vẽ



i3 - SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ

Từ một hệ siêu tĩnh ta có thể có nhiều hệ cơ bản, trong số các hệ cơ bản đó, (a có thể chọn được một hệ cơ bản hợp lý nhất, nghĩa là đối với hệ cơ bản đó có nhiều hệ số phụ triệt tiêu nhất. Trong mục này ta đề cập đến cách chọn hệ cơ bản khi hệ có tính chất đối xứng.

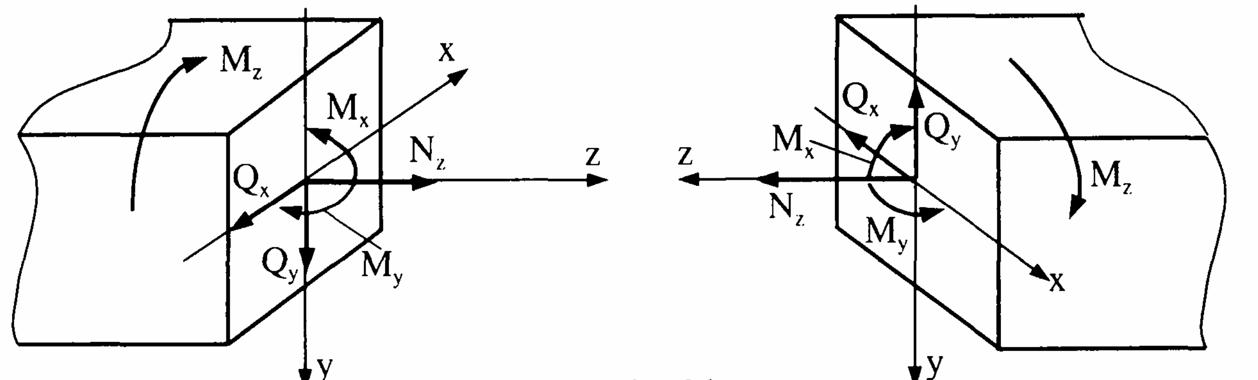
Ta gọi một hệ siêu tĩnh phẳng là một hệ đối xứng khi hệ có một trục đối xứng. Một hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng là khi tải trọng đặt lên một phần nào đó của khung là ảnh của tải trọng đặt lên phần kia qua gương phẳng đặt vuông góc với mặt phẳng của khung và đi qua trục đối xứng của hệ. Ngược lại, nếu tải trọng của phần này là ảnh của phần kia nhưng có chiều ngược lại thì ta gọi là hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng. Ví dụ khung siêu tĩnh (H.15a) là một hệ đối xứng.



Hình - 15

Nếu hệ chịu tải trọng như trên hình (H. 15b) là hệ chịu tải trọng đối xứng và như trên hình (H. 15c) là hệ chịu tải trọng phản đối xứng.

Tương tự, nếu ta xét các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang nào đó thì ta cũng có thể chia các thành phần nội lực thành các thành phần đối xứng và phản đối xứng.



Hình - 16

Lực dọc, mômen uốn M_x, M_y là các thành phần nội lực đối xứng (H.16).

Lực cắt và mômen xoắn là các thành phần nội lực phản đối xứng.

Ta dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau đây:

Nếu một hệ đối xứng chịu tác dụng của tải trọng đối xứng thì nội lực phản đối xứng trên mặt cắt trong mặt phẳng đối xứng của hệ là bằng không. Ngược lại nếu tải trọng là phản đối xứng thì nội lực đối xứng phải bằng không.

Để chứng minh mệnh đề đó chúng ta chú ý các nhận xét sau đây:

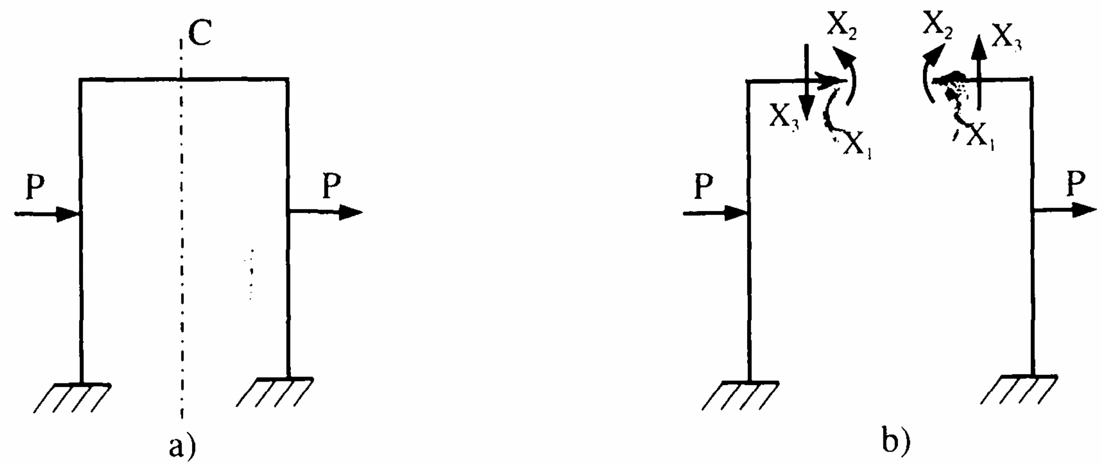
- Khi hệ là đối xứng chịu tải trọng đối xứng thì biểu đồ mômen là đối xứng. Ngược lại, khi hệ là đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng thì biểu đồ mômen là phản đối xứng.

- Phép nhân biểu đồ Vêresaghin giữa biểu đồ đối xứng và phản đối xứng là bằng không.

Bây giờ, giả sử ta có hệ siêu tĩnh chịu lực phản đối xứng như trên hình (H. 17a). Ta chọn hệ cơ bản này bằng cách cắt đôi khung như hình (H. 17b). Ta sẽ chứng minh rằng các hành phần nội lực đối xứng X_1 và X_2 (lực dọc và mômen uốn) trên mặt cắt đối xứng C là bằng không.

Thực vậy, từ điều kiện chuyển vị tương đối giữa 2 mặt cắt là bằng không ta có hệ phương trình chính tắc.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$



Hình - 17

Biểu đồ mômen đơn vị $\overline{M}_1$ và $\overline{M}_2$ là đối xứng, còn $\overline{M}_3$ là phản đối xứng. Biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là phản đối xứng. Vì vậy ta có:

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{1P} = \Delta_{2P} = 0$$

Hệ phương trình chinh tắc được viết gọn lại như sau:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

Vì các hệ số δ_{11}, δ_{22}, δ_{12} là khác không nên từ 2 phương trình đầu ta có thể kết luận X_1 và X_2 là bằng không.

Ngược lại, giả sử khung chịu lực đối xứng khi đó ta có:

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{3P} = 0$$

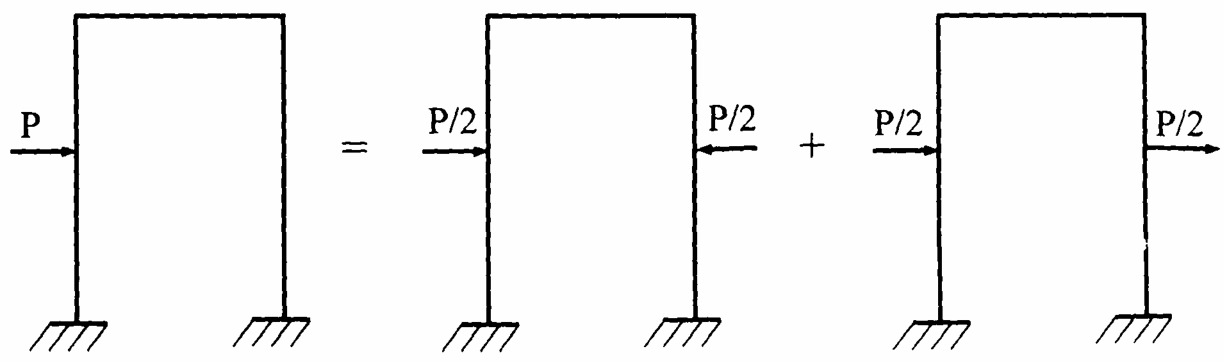
Hệ phương trình chinh tắc sẽ được rút gọn như sau:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ 3 ta cớ $X_3 = 0$.

Vậy mệnh đe đã được chứng minh.

Trường hợp hệ đối xứng nhưng tải trọng là bất kỳ thì ta có thể giải bài toán bằng cách xem hệ như tổng tác dụng của một hệ tải trọng đối xứng và hệ tải trọng phản đối xứng (H 18)

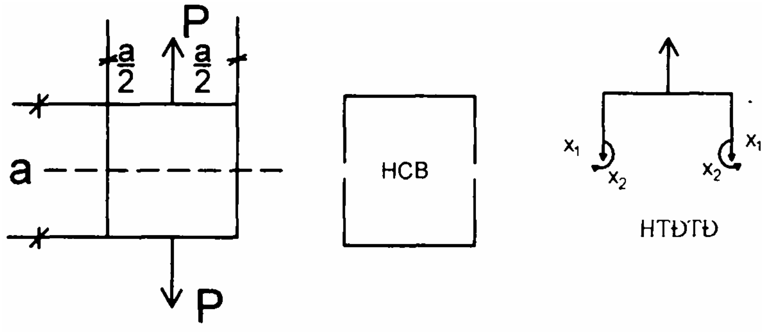


Hình 18

Ví Dụ:

Cho hệ chịu tải như hình vẽ, biết hệ có độ cứng EJ. Hãy vẽ biểu đồ M siêu tĩnh

Giải:



Hệ đối xứng siêu tĩnh bậc 3.

- Chọn hệ cơ bản

- Lập hệ tĩnh định tương đương, ta nhận thấy hệ TĐTĐ cũng là một hệ đối xứng

$\rightarrow \quad x_1 = \dfrac{p}{2}$

Vậy hệ đã cho chỉ còn một ẩn là x_2

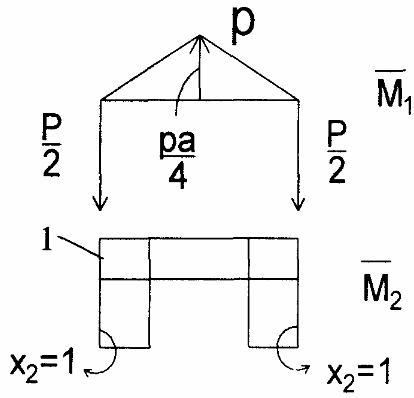
- Viết phương trình chính tắc $\delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0$

Với : $\delta_{22} = \dfrac{2}{EJ}1.a.1 = \dfrac{2a}{EJ}$

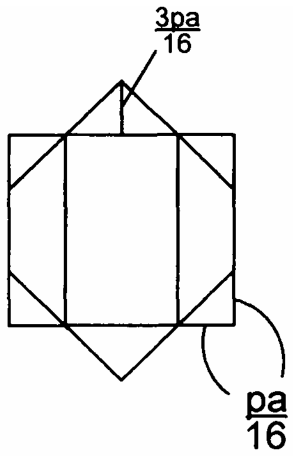
$$\Delta_{2p} = -\frac{2}{EJ}\frac{pa}{4}\frac{a}{4}1 = \frac{pa^2}{8EJ}$$

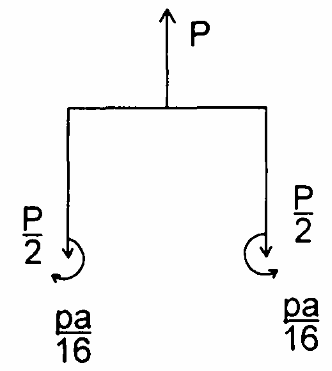
Ta tìm được :

$$x_2 = \frac{pa}{16}$$



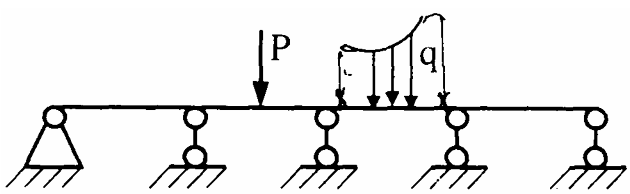
Đặt vào hệ TĐTĐ ta vẽ được biểu đồ M_{st}



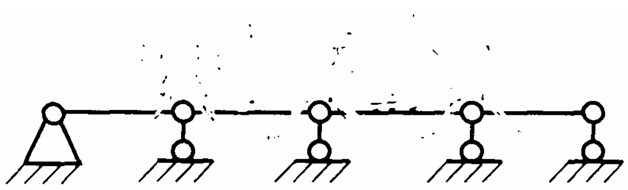


i4 - DẦM LIÊN TỤC

Dầm liên tục là một dầm được đặt trên nhiều gối tựa tạo nên nhiều nhịp (H.21). Đây là bài toán siêu tĩnh, bậc siêu tĩnh là số liên kết đơn thêm vào, nghĩa là bằng số nhịp của dầm trừ đi một.

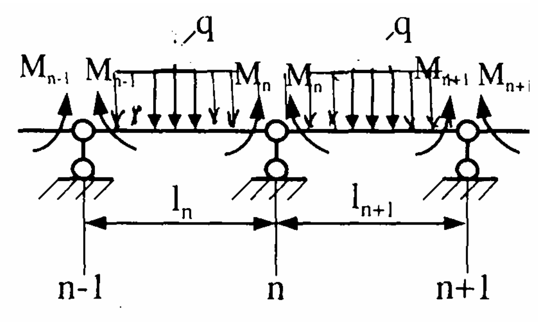


Hình - 21



Hình - 22

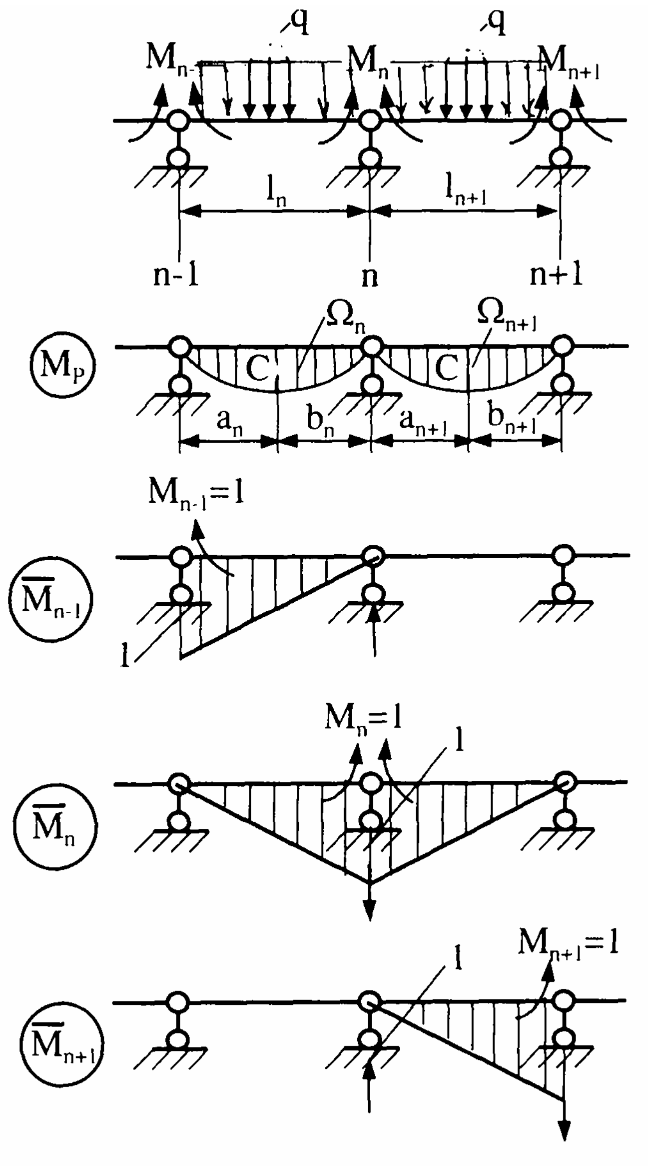
Hệ cơ bản hợp lý là đặt các khớp trên mỗi gối tựa để chia dầm thành nhiều dầm đơn (hình 22).



Hình - 23

Như vậy lực đặt trên một nhịp nào đó sẽ không ảnh hưởng đến các nhịp bên cạnh. Các phản lực liên kết ở đây là các momen.

Điều kiện để hệ trở thành hệ tĩnh định tương đương là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt hai phía của khớp là bằng không (vì dầm liên tục là một thanh liền nên tại đó các mặt cắt không có góc xoay tương đối với nhau). Hệ phương trình chính tắc được thiết lập từ điều kiện đó. Chúng ta nhận thấy góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt về hai phía của khớp chỉ do các lực đặt trên hai nhịp kế cận gây nên vì vậy để tính chuyển vị tương đối của gối tựa thứ n - 1 đến n + 1



Hình - 24

(h.23). Để tiện cho các kí hiệu sau này ta sẽ gọi:

$$X_{n-1} = M_{n-1}; X_n = M_n; X_{n+1} = M_{n+1}$$

Và giả thiết trên hai nhịp đang xét có tải trọng phân bố q nào đó. Phương trình chính tắc sẽ có dạng như sau:

$$\Delta_n = \delta_{n(n-1)} M_{n-1} + \delta_{nn} M_n + \delta_{n(n+1)} M_{n+1} + \Delta_{nP} = 0 \quad (a)$$

Các biểu đồ mômen đơn vị và biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên 2 nhịp đang xét được biểu diễn trên hình 24.

Nếu dầm có độ cứng EJ không đổi trên suốt chiều dài của dầm thì với phép nhân biểu đồ Veresaghin, ta có các hệ số phụ và các số hạng tự do như sau:

$$\delta_{n(n-1)} = \int_0^{l_n} \frac{\overline{M}_{n-1}\overline{M}_n}{EJ_x} ds = \frac{1}{2}.l_n.\frac{1}{3}.1.\frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n}{6EJ_x}$$

$$\delta_{nn} = \sum_{i=n}^{n+1}\int_0^{l_i} \frac{\overline{M}_n\overline{M}_n}{EJ_x} ds = \frac{l_n}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{EJ_x} + \frac{l_{n+1}}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n + l_{n+1}}{3EJ_x}$$

$$\delta_{n(n+1)} = \int_0^{l_{n+1}} \frac{\overline{M}_n\overline{M}_{n+1}}{EJ_x} ds = \frac{1}{2}.l_{n+1}.\frac{1}{3}.1.\frac{1}{EJ_x} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_x}$$

$$\Delta_{np} = \sum_{i=n}^{n+1}\int_0^{l_i} \frac{\overline{M}_n M_P}{EJ_x} ds = \left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right)\frac{1}{EJ_x}$$

Trong đó:

+ I_n I_{n+1} là độ dài của nhịp thứ n và n + 1 .

+ Ω_n . Ω_{n+1} là diện tích của biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên 2 nhịp thứ n và n + 1.

+ a_n và b_{n+1} là khoảng cách từ trọng tâm của các diện tích đó đến gối tựa thứ n- 1 và n + 1.

Đem thay các trị số đó vào phương trình (a) và giản ước cho EJ_x ta có:

$$l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1})M_n + l_{n+1}M_{n+1} + 6\left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right) = 0$$

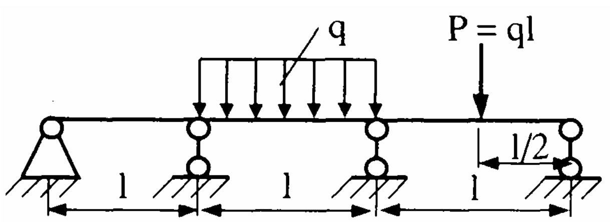
Phương trình đó được gọi là phương trình 3 mômen vì các ẩn số là 3 mômen tại các gối tựa liên tiếp.

Với mỗi gối tựa ta thiết lập được một phương trình 3 mômen và như vậy ta thiết lập được cả hệ phương trình chính tắc.

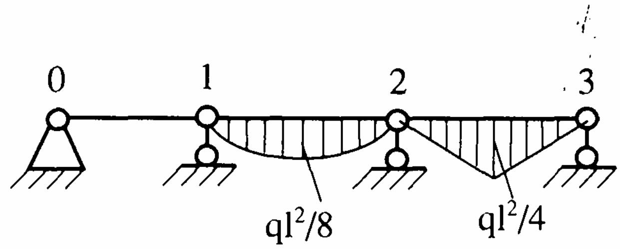
Ghi chú:

- Ω_n và Ω_{n+1} được xem là dương khi biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là căng phía dưới.

Ví dụ 4: Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như hình 25.



Hình - 25



Hình - 26

Bài giải :

Biểu đồ mômen uốn M_p của tải trọng đặt lên hệ cơ bản được biểu diễn trên hình 26. Đánh số thứ tự của các gối tựa như hình vẽ.

Chú ý rằng $M_0 = M_3 = 0$. Ta có phương trình chính tắc như sau:

$$\begin{cases} lM_0 + 2(l+l)M_1 + lM_2 + 6\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{ql^2}{8}.\dfrac{1}{2}\right) = 0 \\ lM_1 + 2(l+l)M_2 + lM_3 + 6\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{ql^2}{8}.\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{2}{4}.\dfrac{ql^2}{8}.\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Hay:

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 + \dfrac{ql^2}{4} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + \dfrac{5ql^2}{8} = 0 \end{cases}$$

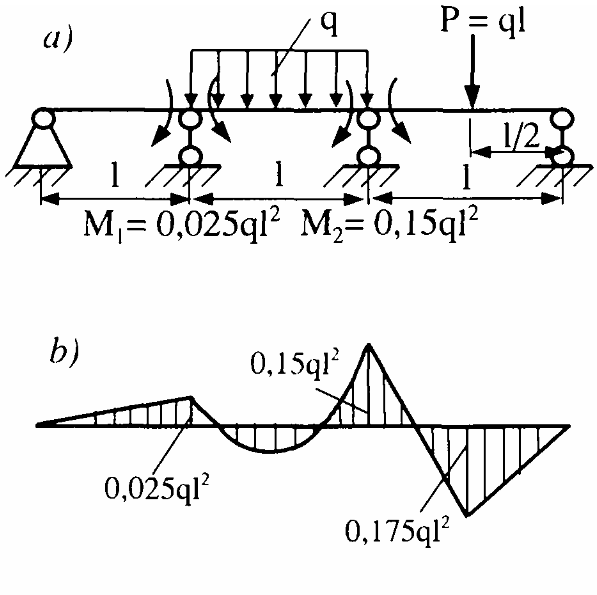
Giải hệ phương trình trên ta tìm thấy:

$$M_1 = -\frac{ql^2}{40} = 0,025ql^2$$

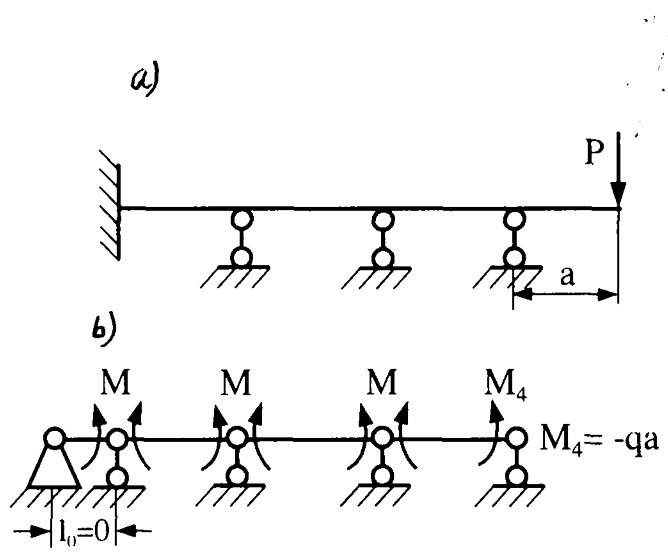
$$M_2 = -\frac{3ql^2}{20} = -0,15ql^2$$

Vậy ta có hệ tĩnh định tương đương như hình 27a và biểu đồ mômen uốn được biểu diễn như hình 27b

Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa và đầu ngàm (H. 28a) thì để sử dụng được phương trình 3 mômen ta biến hệ như trên hình 28.b. Mômen uốn thu gọn có thể xem là mômen liên kết của mặt cắt tại gối tựa cuối cùng. Mômen đó sẽ có trị số dương khi ngoại lực đặt lên đầu thừa làm căng thớ dưới và nó sẽ có trị số âm khi ngoại lực làm căng thớ trên. Ta cũng có thể xem là ngoại lực tác động lên nhịp cuối của dầm. Liên kết ngàm được thay bằng một nhịp với chiều dài của nhịp là bằng không và có độ cứng EJ là vô cùng.



Hình - 27



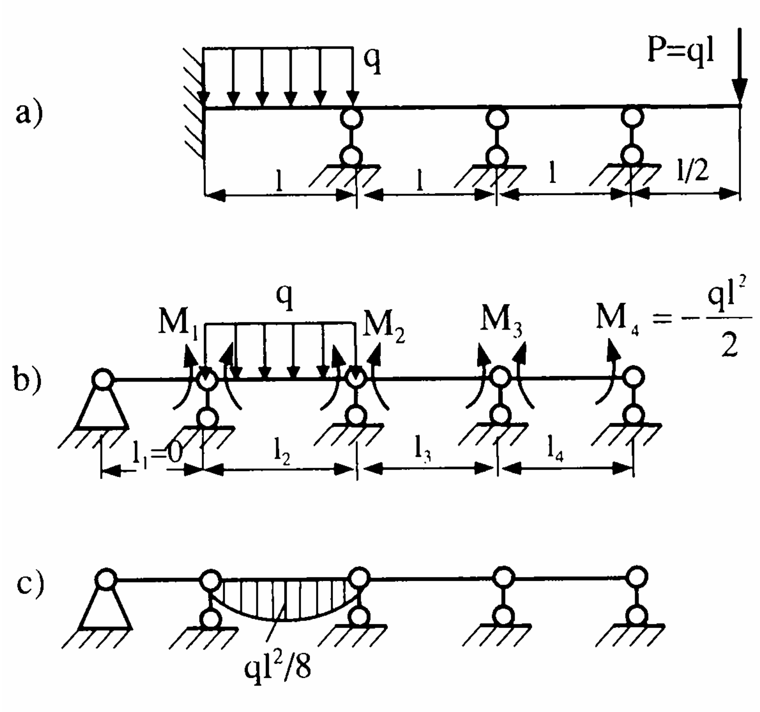
Hình - 28

Ví dụ 5: Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như trên hình 29a.

Bài giải:

Ta có hệ cơ bản như trên hình 29b. Biểu đồ M_p được biểu diễn trên hình (H.29c).

Mômen M_4 có trị số là $-\dfrac{ql2}{2}$



Hình - 29

Hệ phương trình chính tắc được viết như sau:

$$\begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l)M_1 + lM_2 + 6\left(\frac{2}{3}.\frac{ql^2}{2}.\frac{l}{l}.\frac{l}{2}\right) = 0 \\ lM_1 + 2(l + l)M_2 + lM_3 + 6\left(\frac{2}{3}.\frac{ql^2}{3}.\frac{l}{2}\right) = 0 \\ lM_2 + 2(l + l)M_3 + lM_4 = 0 \end{cases}$$

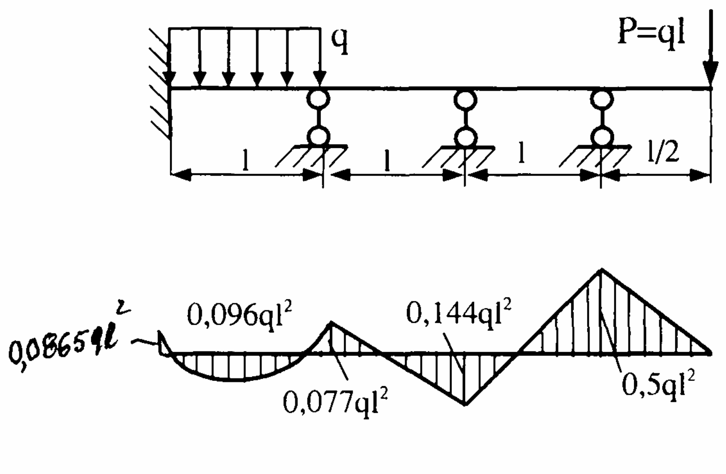
Hay rút gọn lại, với chú ý $l_1 = 0$ và $M_4 = -\frac{ql^2}{2}$, ta có:

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 + \frac{ql^2}{2} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_2 + 4M_3 - \frac{ql^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ thống phương trình trên ta được:

$$M_1 = -0{,}0865ql^2$$
$$M_2 = -0{,}0769ql^2$$
$$M_3 = +0{,}144ql^2$$

Biểu đồ mômen được biểu diễn như trên hình 30.



Hình - 30

CHƯƠNG 9

TẢI TRỌNG ĐỘNG

9.1. KHÁI NIỆM

Trong thực tế tính toán các chi tiết máy và bộ phận công trình ngoài tác dụng tĩnh, ta còn gặp tác động của tải trọng.

Tải trọng tĩnh là loại tải trọng tăng từ từ, giữ nguyên không đổi trong suốt thời gian làm việc và không làm xuất hiện lực quán tính trên hệ.

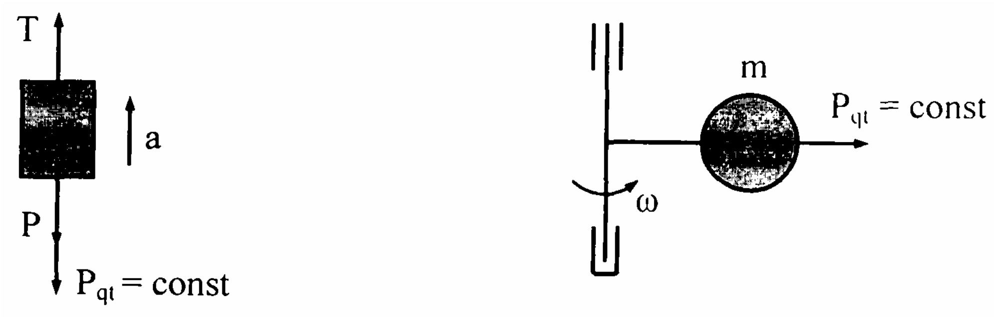
Tải trọng động là loại tải trọng gây ra lực quán tính trên hệ đang xét. Đó là loại tải trọng tác dụng đột ngột hay biến đổi theo thời gian nên biến dạng và chuyển vị của hệ cũng biến đổi đột ngột hay biến đổi theo thời gian

Ví dụ: Lực ly tâm do phần lệch tâm của rôto khi quay gây ra tạo nên lực biến đổi tuần hoàn theo thời gian; lực do va đập từ vật này vào vật khác...

Trong thực tế nhiều công trình hay chi tiết được tính với hệ số an toàn rất cao đối với tải trọng tĩnh nhưng lại vẫn bị phá hỏng bởi tải trọng động. Vì vậy việc nghiên cứu phương pháp tính toán đối với tải trọng động đóng vai trò rất quan trọng vì nó là vấn đề rất hay gặp trong kỹ thuật. với mỗi loại tai trọng động khác nhau. Có 3 loại bài toán tải trọng động như sau:

a. Bài toán động với lực quán tính không đổi.

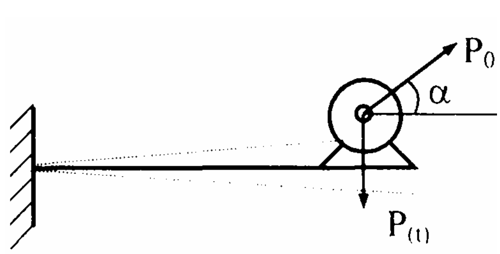
Đây là trường hợp hệ chuyển động tịnh tiến và hệ chuyển động quay.



Hình 9.1

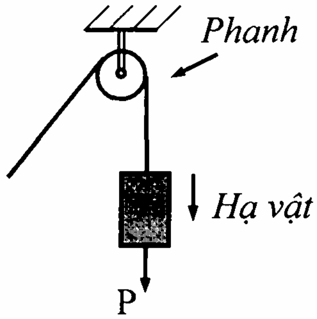
b. Bài toán dao động.

Ví dụ như một mồm được đặt trên dầm, khi làm việc, do phần rôto của môtơ có trọng lượng lệch tâm nên sẽ gây ra lực quán tính ly tâm biến đổi tuần hoàn theo thời gian và do đó sẽ làm cho dầm dao động lên xuống.

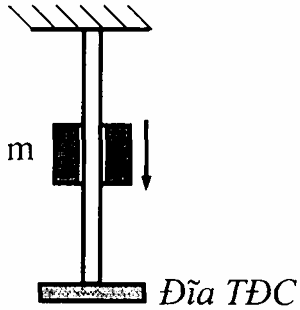


Hình9.2

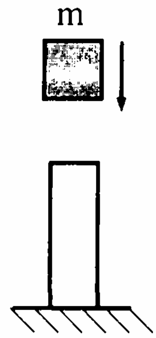
c. Bài toán va chạm



Hình9.3a

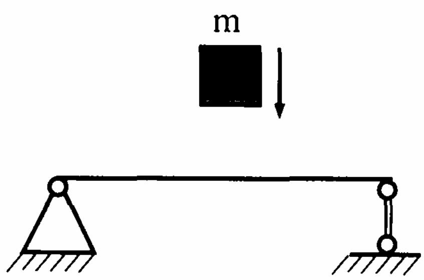


Hình 9.3 b

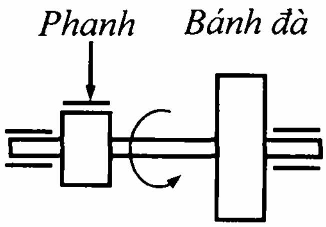


Hình 9.3 c

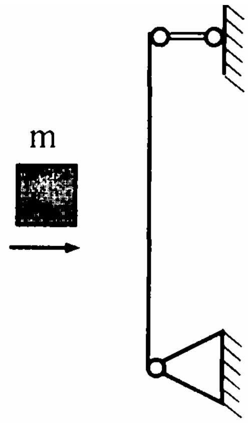
Trong bài toán va chạm ta có trường hợp va chạm kéo (Hình 11.3 a,b), và chạm nén (Hình 11.3c), va chạm uốn (Hình 11.3d), va chạm xoắn (Hình 11.3e) và va chạm ngang (Hình 11.3 f).



Hình 9.3 d



Hình 9.3 e



Hình 9.3 f

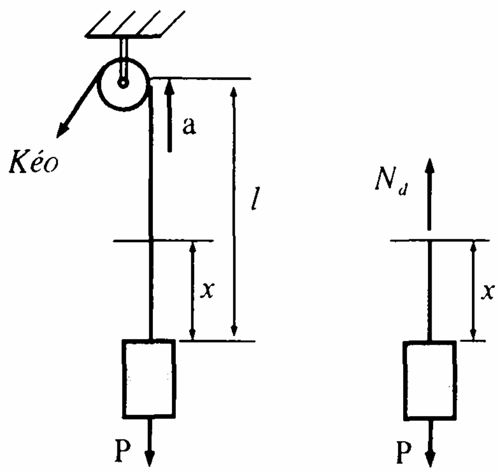
9.2. BÀI TOÁN HỆ CHUYỂN ĐỘNG VỚI LỰC QUÁN TÍNH KHÔNG ĐỔI

9.2.1. Bài toán hệ chuyển động tịnh tiến.

a. Đặt bài toán: Tính sức bền của một dây cáp ở đầu treo vật nặng P chuyển động với gia tốc không đổi như trên hình vẽ

b. Phân tích bài toán

Gọi y là trọng lượng riêng và F là diện tích mặt cắt ngang của dây cáp. Gia tốc a được xem là dương khi nó có chiều hướng lên trên và là âm khi nó có chiều hướng xuống dưới. Xác định nội lực trong dây cáp tại một mặt cắt cách đầu dây một đoạn là x.



Hình 9.4

Áp dụng nguyên lý Dalambe ta có phương trình cân bằng động cho phần khảo sát:

$$N_d = (P + \gamma Fx) + \left(\frac{P}{g}a + \frac{\gamma Fx}{g}a\right) \quad (9\text{-}1)$$

Do vậy có ứng suất trên mặt cắt ngang của dây cáp là:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{F} = \left(\frac{P}{F} + \gamma.x\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (9\text{-}2)$$

Nếu ở trạng thái tĩnh thì ứng suất trên mặt cắt ngang của dây cáp là:

$$\sigma_t = \left(\frac{P}{F} + \gamma.x\right) \quad (9\text{-}3)$$

Đặt: $k_d = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$ được gọi là hệ số động, ta có: $\sigma_d = \sigma_t.k_d$ (9-4)

Trong đó : - g là gia tốc trọng trường. - a là gia tốc khi kéo vật.

Chú ý: 1. Sau khi tính được σ_d thì điều kiện bền của dây cáp giống trường hợp tĩnh:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{F} \le [\sigma] \quad (9\text{-}5)$$

2. Công thức tính hệ số động ta chỉ chú ý tới trường hợp $k_d > 1$ tức là chú ý tới trường hợp gia tốc a có dấu dương. Đó là trường hợp kéo vật lên nhanh dần đều hoặc hạ vật xuống chậm dần đều.

9.2.2 Bài toán hệ chuyển động quay.

- Ví dụ 1: Xác định nội lực động lớn nhất trong thanh AC khi cho hệ quay đều quanh trục thẳng đứng với tốc độ góc ω. Viết điều kiện bền cho thanh quay đó? Cho thanh có [σ]. (Hình 9.5)

Giải:

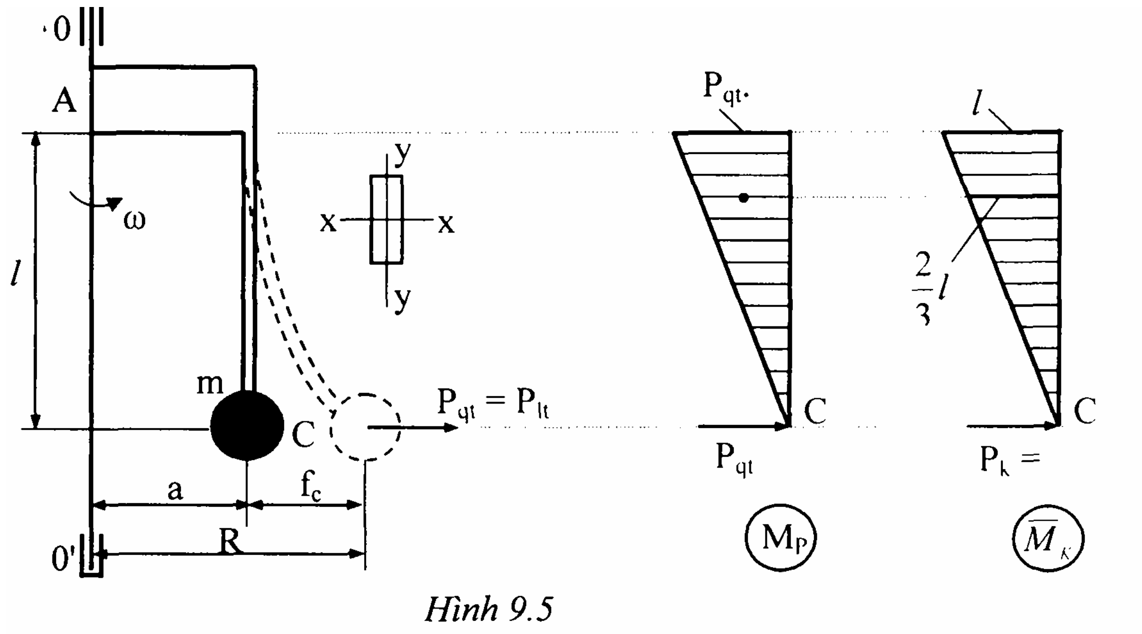
1. Xác định lực quán tính:

Do quả cầu C quay đều quanh trục 00', nên thành phần gia tốc tiếp của nó bằng không, chỉ còn thành phần gia tốc pháp, được tính theo công thức:

$$W_n = R\omega^2 = (a + f_C)\omega^2 \quad (9\text{-}6)$$

Trong đó: R là bán kính động của quả cầu C đối với trục quay. Do quả cầu quay đều nên nó phát sinh lực quán tính ly tâm là:

$$P_{qt} = m.W_n = mR\omega^2 = m(a + f_c)\omega^2 \qquad (9\text{-}7)$$



Hình 9.5

Độ võng động của điểm C khi quả cầu quay là f_c được tính theo phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin, do dầm bị uốn quanh trục y nên có:

$$f_c = (M_P)\cdot(\overline{M}_K) = \frac{P_{qt}.l^3}{3EJ_y} \qquad (9\text{-}8)$$

Thay (9-8) vào (9-7) ta có:

$$P_{qt} = m\left(a + \frac{P_{qt}.l^3}{3EJ_y}\right)\omega^2 \qquad (9\text{-}9)$$

Ta thấy phương trình (9-9) chỉ còn một ẩn là P_{ql} cho nên giải ra ta được:

$$P_{qt} = \frac{m.a.\omega^2}{\left(1 - \frac{m.l^3.\omega^2}{3EJ_y}\right)} \qquad (9\text{-}10)$$

2. Nó lực động lớn nhất

Đặt lực P_{qt} vào dầm AC ta vẽ được biểu đồ mômen uốn M_p và xác định được giá trị mômen uốn nội lực lớn nhất, đó là:

$$M^y_{max} = P_{qt}.l = \frac{m.a.\omega^2.l}{\left(1 - \frac{m.l^3.\omega^2}{3EJ_y}\right)} \qquad (9\text{-}11)$$

3. Điều kiện bền

$$\sigma_{max} = \frac{M^y_{max}}{W_y} \le [\sigma] \quad (9\text{-}12)$$

Hay:

$$\sigma_{max} = \frac{M^y_{max}}{W_y} = \frac{P_{qt}.l}{W_y} = \frac{m.a.\omega^2.l}{\left(1 - \frac{m.l^3.\omega^2}{3EJ_y}\right).W_y} \le [\sigma] \quad (9\text{-}13)$$

- Ví dụ 2:

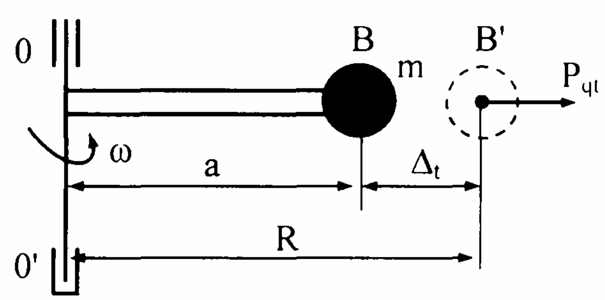
Cho thanh AB có diện tích mặt cắt ngang là F và mô đun đàn hồi E, tại đầu B của thanh có gắn một quả cầu khối lượng m. Xác định tốc độ góc cho phép của hệ nếu cho thanh AB quay đều quanh trục thẳng đứng 00',. Biết ứng suất cho phép là [σ], bỏ qua trọng lượng của thanh AB.

Giải:

1. Xác định lực quán tính ly tâm:

Ta có:

$$P_{qt} = mR\omega^2 = m(a + \Delta_t).\omega^2 \quad (11\text{-}14)$$



Trong đó: Δ_t là độ dãn dài của thanh AB do lực P_{qt} gây ra.

Vậy có:

$$\Delta_t = \Delta l = \frac{N_z.a}{EF} = \frac{P_{qt}.a}{EF} \quad (9\text{-}15)$$

Thay (9- 15) vào (9- 14) có:

$$P_{qt} = m\left(a + \frac{P_{qt}.a}{EF}\right).\omega^2 \quad (9\text{-}16)$$

Từ (9- 16) giải ra ta được:

$$P_{qt} = \frac{m.a.\omega^2}{\left(1 - \frac{m.a.\omega^2}{EF}\right)} \quad (9\text{-}17)$$

2. Nội lực động:

$$N_d = P_{qt} = \frac{m.a.\omega^2}{\left(1 - \frac{m.a.\omega^2}{EF}\right)} \qquad (9\text{-}18)$$

3. Điều kiện bền:

Ta có:
$$\sigma_d = \frac{N_d}{F} \leq [\sigma]$$

Hay:
$$\sigma_d = \frac{P_{qt}}{F} = \frac{m.a.\omega^2}{\left(1 - \frac{m.a.\omega^2}{EF}\right).F} \leq [\sigma] \qquad (9\text{-}19)$$

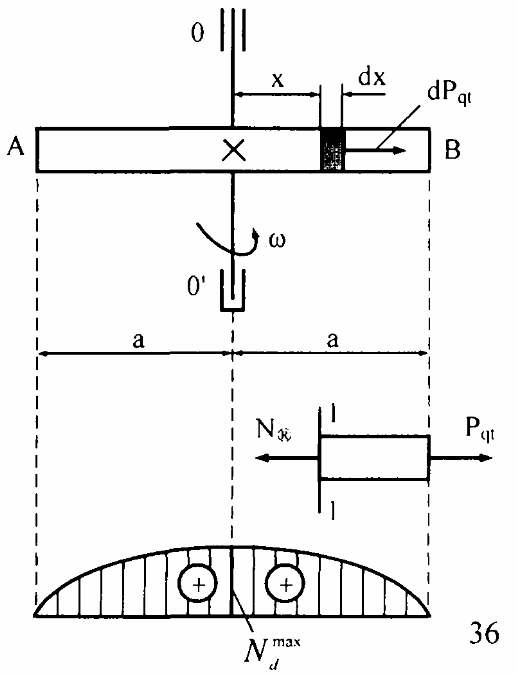
Suy ra:
$$\omega \leq \sqrt{\frac{[\sigma].F}{m.a\left(1 + \frac{[\sigma]}{E}\right)}} \qquad (9\text{-}20)$$

Đó là tốc độ góc cho phép của thanh AB khi nó quay xung quanh trục 00’.

Như vậy qua 2 ví dụ trên ta thấy vấn đề cơ bản của bài toán là xác định được lực quán tính cho hệ, còn các quá trình còn lại giống như trường hợp tĩnh bình thường. Ở 2 ví dụ trên thì lực quán tính P_{qt} đều đặt vào một chất điểm có khối lượng m. Sau đây ta sẽ xét một ví dụ mà lực quán tính P_{qt} phân bố trên toàn bộ thanh chịu lực.

- Ví dụ 3:

Thanh AB quay đều quanh trục thẳng đứng 00’ (hình vẽ) với vận tốc góc là ω, thanh có tiết diện ngang là F và trọng lượng riêng là y. Hãy vẽ biểu đồ nội lực trong thanh và viết điều kiện bền cho thanh, biết ứng suất cho phép của thanh là $[\sigma]$.



Giải:

1. Tìm lực quán tính ly tâm tác dụng vào phân tố có chiều dài dx:

Xét một phân tố diện tích trên thanh AB, phân tố có chiều dài dx ứng với mặt cắt 1- 1 và có hoành độ là x. Vậy phân tố có khối lượng là:

$$dm = \frac{\gamma.F.dx}{g} \qquad (9\text{-}21)$$

Vậy lực quán tính ly tâm tác dụng vào phân tố dx là:

$$dP_{qt} = dm.x.\omega^2 = \frac{\gamma.F.dx}{g}.x.\omega^2 \qquad (9\text{-}22)$$

2. Tìm lực quán tính ly tâm tác dụng vào phần khảo sát.

Dùng mặt cắt 1 - 1 cắt thanh và chia thanh ra làm 2 phần. Xét phần bên phải của mặt cắt 1 - 1 ta thấy lực quán tính ly tâm từ mặt cắt 1 - 1 đến đầu mút B của thanh có trị số là:

$$P_{qt} = \int_x^a dP_{qt} = \int_x^a \frac{\gamma.F.\omega^2}{g} x dx = \frac{\gamma F\omega^2}{2g} x^2 \Big|_x^a = \frac{\gamma F\omega^2}{2g}\left(a^2 - x^2\right) \qquad (9\text{-}23)$$

3. Xác đinh nội lực trên mặt cắt 1-1.

Xét sự cân bằng của phần bên phải mà ta đang khảo sát, ta có:

$$N_d = P_{qt} = \frac{\gamma F\omega^2}{2g}\left(a^2 - x^2\right) \qquad (9\text{-}24)$$

Qua biểu thức trên ta thấy N_d Phụ thuộc theo bậc 2 đối với khoảng cách x. Như vậy ta có nhận xét:

+ Khi x = 0 (ứng với điểm nằm trên trục quay) có:

$$N_d = P_{qt} = \frac{\gamma F \omega^2}{2g} a^2 \qquad (9\text{-}25)$$

+ Khi x = a (ứng với điểm mút A và B) có:

$$N_d = P_{qt} = \frac{\gamma F \omega^2}{2g}\left(a^2 - x^2\right) = 0 \qquad (9\text{-}26)$$

Vậy ta có thể vẽ được biểu đồ lực dọc Nz như hình vẽ.

4. Điều kiện bền

$$\sigma_{max} = \frac{N_d^{max}}{F} \le [\sigma]$$

Hay:

$$\sigma_{max} = \frac{N_d^{max}}{F} = \frac{\gamma \omega^2 a^2}{2g} \le [\sigma] \qquad (9\text{-}27)$$

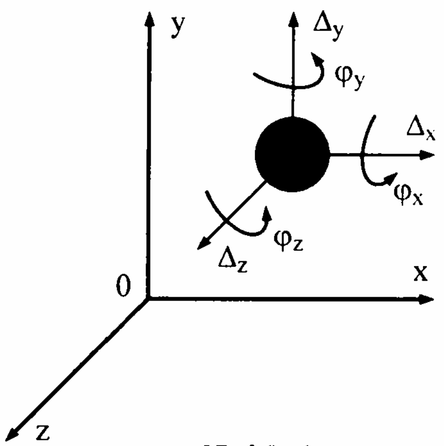
Như vậy để tính được lực quán tính trong trường hợp thanh quay có khối lượng phân bố liên tục thì ta phải xác định lực quán tính tác dụng lên một phân tố có khối lượng dm, sau đó tiến hành tính lấy phân để tính lực quán tính tác dụng lên cả đoạn thanh.

9.3. BÀI TOÁN DA O ĐỘNG

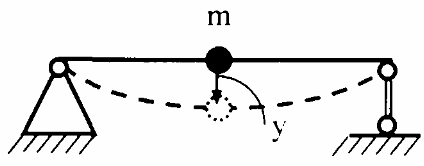
9.3.1 Khái niệm chung

a. Định nghĩa bậc tự do

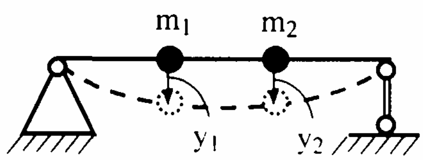
Bậc tự do của một hệ đàn hồi khi dao động là số thông số độc lập để, xác định vị trí của hệ.



Hình9..6 a



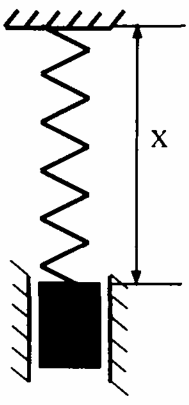
Hình11.6 b



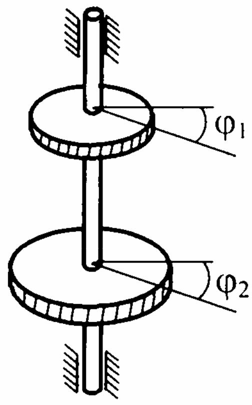
Hình 9.6c

Hệ trên hình a có 6 thông số là Δ_x, Δ_y, Δ_z, φ_x, φ_y, φ_z để xác định vị trị của hệ trong không gian, hay nói cách khác là hệ có 6 khả năng chuyển động, đó là 3 chuyển động tịnh tiến và 3 chuyển động xoay. Vậy ta nói hệ đó có 6 bậc tự do

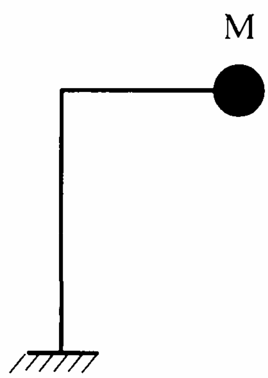
Trên hình b biểu diễn vật có khối lượng m đặt trên một dầm, nếu bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm thì hệ chỉ cần có một thông số để xác định vị trí của nó trong mặt phẳng. Ta nói hệ có một bậc tự do.



Hình 9..6 d



Hình 9..6 e



Hình 9..6 f

Trên hình c và để xác định được vị trí của hệ ta phải biết các độ võng y_1 và y_2 của các khối lượng m_1 và m_2.

Hệ trên hình e có hai thông số φ_1 và φ_2 để xác định vị trí của nó trong không gian. Các hệ đó là các hệ có hai bậc tự do.

Hệ trên hình d có một thông số x để xác định vị trí của nó, vậy hệ đó có một bậc tự do.

Với hệ trên hình f thì tuy chỉ có một khối lượng M, nhưng đế xác định vị trí của M thì ta cần phải có hai toạ độ x và y. Nếu như mômen quán tính của M đối với trọng tâm là không đáng kể thì hệ có hai bậc tự do, còn nếu phải để ý đến mômen quán tính của M đối với trọng tâm của nó thì hệ có ba bậc tự do vì ngoài hai toạ độ thẳng của M ta còn phải để ý đến sự quay của M khi hệ dao động trong mặt phẳng của khung.

Số bậc tự do của hệ tuỳ thuộc vào sơ đồ lựa chọn để tính, việc chọn sơ đồ tính toán dựa vào mức độ gần đúng cho phép giữa sơ đồ tính và hệ khảo sát.

Ví dụ trong trường hợp khi không thể bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm thì hệ sẽ có vô số bậc tự do. Cách giải bài toán là luôn tìm cách đưa hệ về hệ có ***bậc tự do thấp*** hơn để tính dễ hơn, nhưng với cách giải này ta chỉ đạt được kết quả gần đúng. Vậy bậc tự do của một hệ xác định theo sơ đồ tính đã chọn, nghĩa là nó phụ thuộc vào sự gần đúng mà ta đã chọn khi lập sơ đồ tính.

b. Phân loại dao động

+ ***Dao động tự do*** là dao động chỉ có lực kích thích ở thời điểm ban đầu sau đó hệ không chịu tác dụng của lực kích thích đó nữa mà hệ tự dao động.

Lực kích thích ban đầu thường là một xung lực hoặc là một sự va chạm nào đó, do vậy mà bài toán này còn được xét dưới dạng bái toán va chạm.

+ ***Dao động cưỡng bức*** là dao động của hệ đàn hồi khi có lực kích thích trong suốt quá trình dao động.

+ ***Dao động tham số*** là loại dao động mà các tham số vật lý của hệ thống biến đổi theo thời gian gây nên.

Ví dụ các trục truyền động có mômen quán tính theo các phương khác nhau do đó độ cứng của trục truyền biến đổi theo thời gian và khi truyền động trục xuất hiện dao động

+ ***Dao động tự dao động*** là loại dao động do sự tác động qua lại giữa các bộ phận trong hệ thống gây nên dao động

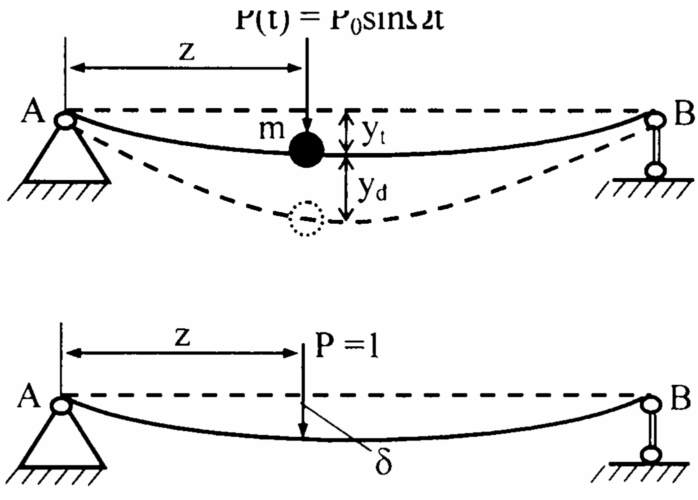
+ ***Dao động ngẫu nhiên*** là dao động của các quá trình không xác định

9.3.2 Dao động cưỡng bức của hệ đàn hồi một bậc tự do

Xét dầm AB, trên dầm đặt một vật khối lượng m tại hoành độ z nào đó. Nếu bỏ qua trọng lượng của dầm ta được một hệ đàn hồi có một bậc tự do. Tại điểm đặt vật có lực kích thích tuần hoàn $P_{(t)} = P_0 \sin\Omega_t$ (P_0 là biên độ lực kích thích, Ω là tần số lực kích thích). Tìm chuyển vị động lớn nhất tại hoành độ z đã cho và ứng suất cực đại trong dầm?

Ban đầu khi chưa có lực kích thích P(t) thì dầm có đô võng v_t tai điểm đặt vật.

Khi hệ đặt thêm lực kích thích tuần hoàn P(t) thì tại điểm đặt vật sẽ có thêm một độ võng động (ký hiệu là y_d). Nếu gọi chuyển vị của khối lượng m là y_d có chiều dương là chiều hướng xuống dưới thì chuyển vị y_d là hàm của thời gian, do đó gia tốc và vận tốc của khối lượng m



là $a = \dfrac{d^2 y_d}{dt^2} = \ddot{y}_d$ và

$$v = \frac{dy_d}{dt} = \dot{y}_d$$

Vậy vấn đề cần giải quyết ở đây là ta phải tìm độ võng động y_d?

a. Lực tác dụng vào hệ:

Các lực tác dụng vào vật m khi vật m đang chuyển động đó là: + Lực quán tính ngược chiều chuyển động có giá trị:

$$F_{qt} = -ma = -m.\frac{d^2 y_d}{dt^2} = -m.\ddot{y}_d \quad (9\text{-}28)$$

Trong đó: m là khối lượng của vật và y_d là gia tốc chuyển động của vật

+ Lực cản của môi trường ngược chiều với chuyển động và có giá trị:

$$F_c = -\beta.\frac{dy_d}{dt} = -\beta.\dot{y}_d \qquad (9\text{-}29)$$

Trong đó: β là hệ số tỉ lệ và y_d là vận tốc chuyển động của vật

+ Lực kích thích ban đầu P(t)

Vậy tổng hợp các lực tác dụng vào vật khối lượng m là:

$$P = P_{(t)} + F_{qt} + F_c = (P_0.\sin\Omega t - m.\ddot{y}_d - \beta.\dot{y}_d) \qquad (9\text{-}30)$$

b. Phương trình chuyển động

Giả sử tại hoành độ z của dầm AB chỉ có lực đơn vị $P_k = 1$ tác dụng.

Chuyển vị tại đó do lực $P_k = 1$ gây ra là δ. Nếu tổng hợp lực tác dụng vào vật là P thì độ võng do nó gây ra là y_d Ta có:

$$y_d = P.\delta \qquad (9\text{-}31)$$

hay:

$$y_d = P.\delta = (P_0.\sin\Omega t - m.\ddot{y}_d - \beta.\dot{y}_d).\delta \qquad (9\text{-}32)$$

hay:

$$\delta m\ddot{y}_d + \delta\beta\dot{y}_d + y_d = \delta P_0 \sin\Omega t \qquad (9\text{-}33)$$

Chia hai vế của phương trình (9-33) cho m.δ và đặt:

+ $\omega^2 = \dfrac{1}{m\omega}$ (9-34), với là tần số riêng của hệ khi không có cản.

+ 2α = $\dfrac{\beta}{m}$ (9-35), với α là hệ số cản của môi trường.

Biến đổi phương trình (9-33) ta có:

$$\ddot{y}_d + 2\alpha\dot{y}_d + \omega^2 y_d = \frac{P_0}{m}\sin\Omega t \qquad (9\text{-}36)$$

Phương trình (11 - 36) chính là phương trình chuyển động của vật m dưới tác dụng của lực kích thích tuần hoàn P(t) = $P_0\sin\Omega$ t.

c. Tìm y_d

Ta thấy rằng nghiệm của phương trình (9-36) là nghiệm của một phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất. Nếu gọi nghiệm của (9-36) là y_d thì ta có:

$$y_d = y_{d1} + y_{d2} \qquad (9\text{-}37)$$

Trong đó:

* y_{d2} là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất.

$$y_{d2} = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (9\text{-}38)$$

Nghiệm này biểu diễn phương trình dao động tự do tắt dần, dao động này có biên độ ban đầu là A. Trong đó:

+ ω là tần số riêng của hệ khi có cản:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

+ ω là tần số riêng của hệ khi không có cản.

+ φ là pha ban đầu của dao động tự do tắt dần.

* y_{d1} là nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất.

Nghiệm này có dạng:

$$y_{d1} = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \qquad (9\text{-}39)$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số được xác định bằng cách thay biểu thức (11-39) vào phương trình (11-36) và đồng nhất 2 vế, ta có:

$$C_1 = \frac{P_0}{m} \cdot \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \qquad (9\text{-}40)$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{m} \cdot \frac{2\alpha\Omega}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \qquad (9\text{-}41)$$

Nếu ta đặt:

$$\sin\psi = \frac{2\alpha\Omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \qquad (9\text{-}42)$$

$$\cos\psi = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \qquad (9\text{-}43)$$

và thay: $\delta = \dfrac{1}{m\omega^2}$ thì biểu thức của y_{d1} có dạng:

$$y_{d1} = A_1 \sin(\Omega t - \psi) \qquad (9\text{-}44)$$

Với:

$$A_1 = \frac{P_0 . \delta}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \qquad (9\text{-}45)$$

Nghiệm này biểu diễn phương trình dao động điều hoà dưới tác dụng của lực kích thích, với:

+ A_1 là biên độ của dao động điều hoà.

+ ψ là pha ban đầu của dao động điều hoà.

Sau một thời gian xác định thì thành phần dao động tự do tắt hoàn toàn, lúc đó hệ sẽ dao động điều hoà. Tức là ta có:

$$y_d = y_{d1} = A_1 \sin(\Omega t - \psi) \qquad (9\text{-}46)$$

d. Tìm y_{dmax}:

Từ 9-49) ta có:

$$y_d^{max} = A_1 = \frac{P_0.\delta}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \qquad (9\text{-}47)$$

Với A_1 là biên độ của dao động diều hoà.

Ta đã biết P_0 là biên độ của lực kích thích. Vậy tích số $P_0.\delta$ có thể coi là độ võng tại điểm có hoành độ *z* do biên độ lực kích thích P_0 giả thiết đặt tĩnh gây ra. Do đó ta đặt:

$$y_t^* = P_0.\delta \qquad (9\text{-}48)$$

Vậy có:

$$y_d^{max} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}.y_t^* \qquad (9\text{-}49)$$

Đặt:

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \qquad (9\text{-}50)$$

k_d được gọi là hệ số động của dao động.

Vậy ta có:

$$y_d^{max} = k_d.y_t^* \qquad (9\text{-}51)$$

e. Tìm σ_{max}:

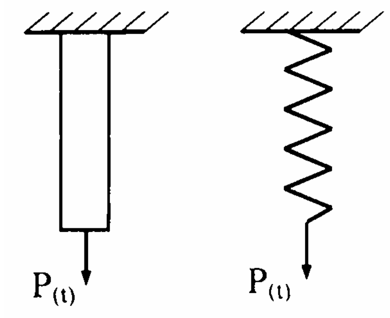
Nếu biết hệ số k_d ta có thể tìm được ứng suất động lớn nhất phát sinh trong hệ bằng những mối liên hệ:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d.\sigma_t^* \\ \tau_d &= k_d.\tau_t^* \end{aligned} \qquad (9\text{-}52)$$

Trong đó σ_d và τ_d là ứng suất gây ra do tải trọng động, còn σ_t^* và τ_t^* là ứng suất do trị số lớn nhất của lực kích thích khi đặt tĩnh lên hệ gây ra. Nếu trên hệ còn có tải trọng tĩnh tác dụng thì ứng suất toàn phần trên một mặt cắt nào đó là tổng ứng suất do tải trọng tĩnh và tải trọng động gây ra.

Chú ý:

Công thức (9-51), (9-52) ta thành lập với hệ đàn hồi chịu uốn, còn với trường hợp hệ đàn hồi chịu lực kéo, nén, xoắn ta cũng có tương quan tương tự. Ví dụ như hệ chịu lực như hình vẽ có:



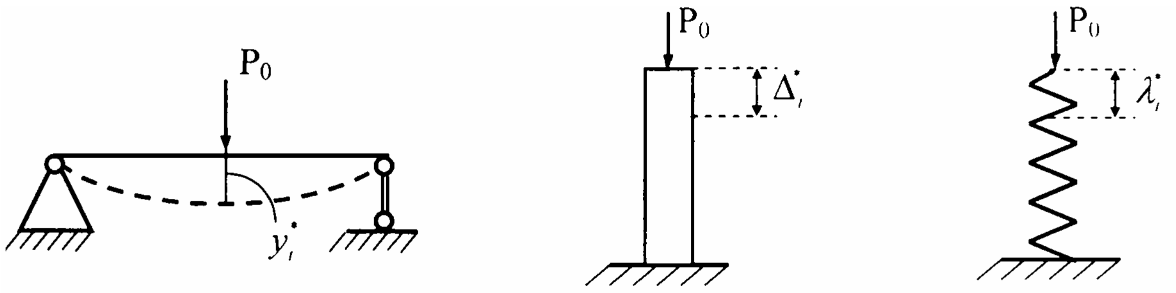
$$\Delta_d = k_d.\Delta_t^* \quad ; \quad \sigma_d = k_d.\sigma_t^*$$

$$\lambda_d = k_d.\lambda_t^* \quad ; \quad \tau_d = k_d.\tau_t^*$$

**** Trình tự chung giải bài toán dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do.***

a. Tính chuyển vị tĩnh của lực kích thích P_o:

Đặt biên độ lực kích P_o vào hệ và coi nó như một lực đặt tĩnh để tính y_t^* và σ_t^* (đối với dầm), Δ_t^* và σ_t^* (đối với thanh chịu kéo), λ_t^* và τ_t^* (đối với lò xo) Hình vẽ:



b. Tính hệ số động theo công thức (9-50):

Để tính được hệ số k_d ta cần phải tính được:

+ Tần số lực kích tuần hoàn:

$$\boxed{\Omega = \frac{\pi.n}{30} \quad \left(1/s\right)} \qquad (9\text{-}53)$$

Trong đó n là số vòng quay của động cơ (v/ ph).

+ Tần số riêng ω của hệ khi không có cản.

Từ công thức (9-34) ta có:

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta} = \frac{g}{P.\delta} = \frac{g}{y_t} \qquad (9\text{-}54)$$

Trong đó: - P là trọng lượng của vật có sẵn trên dầm.

- y_t là độ võng tĩnh do vật trọng lượng P có sẵn trên dầm gây ra.

- g là gia tốc trọng trường.

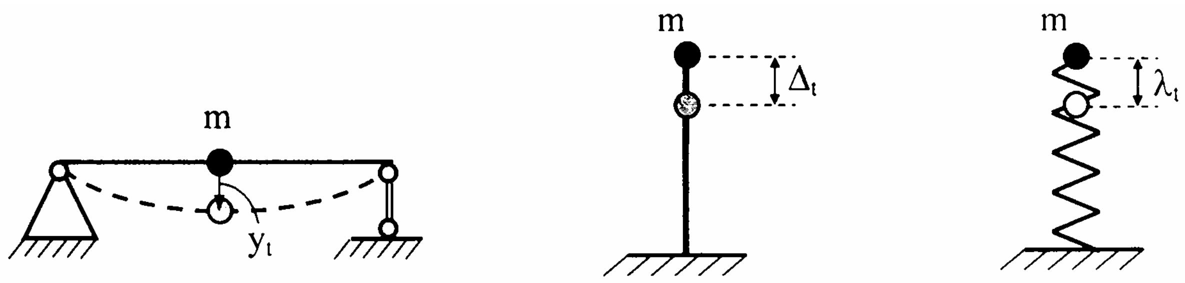
- δ là chuyển vị đơn vị do lực đơn vị $P_k = 1$ gây ra.

Vậy có:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t}} \left(\frac{1}{s}\right)} \qquad (9\text{-}55)$$

Chú ý: Tần số riêng ω vẫn là có sẵn trong hệ khi trong hệ chưa có một bậc kích nào cả. Vì vậy độ võng y_t chỉ do các trọng lượng tĩnh có sẵn trong hệ gây ra.

Vậy vấn đề cơ bản của việc xác định tần số riêng là vấn đề tính độ võng y_t đối với dầm, tính chuyển vị dài ít đối với thanh chịu kéo nén, tính biến dạng λ_t đối với lò xo.



c. Tính chuyển vị động:

Đối với dầm:

$$y_d = k_d . y_t^{*} \qquad (9\text{-}56)$$

Đối với thanh chịu kéo, nén:

$$\Delta_d = k_d . \Delta_t^{*} \qquad (9\text{-}57)$$

Đối với lò xo:

$$\lambda_d = k_d . \lambda_t^{*} \qquad (9\text{-}58)$$

d. Tính ứng suất động:

Đối với dầm và thanh:

$$\sigma_d = k_d . \sigma_t^{*} \qquad (9\text{-}59)$$

Đối với lò xo:

$$\tau_d = k_d . \tau_t^{*} \qquad (9\text{-}60)$$

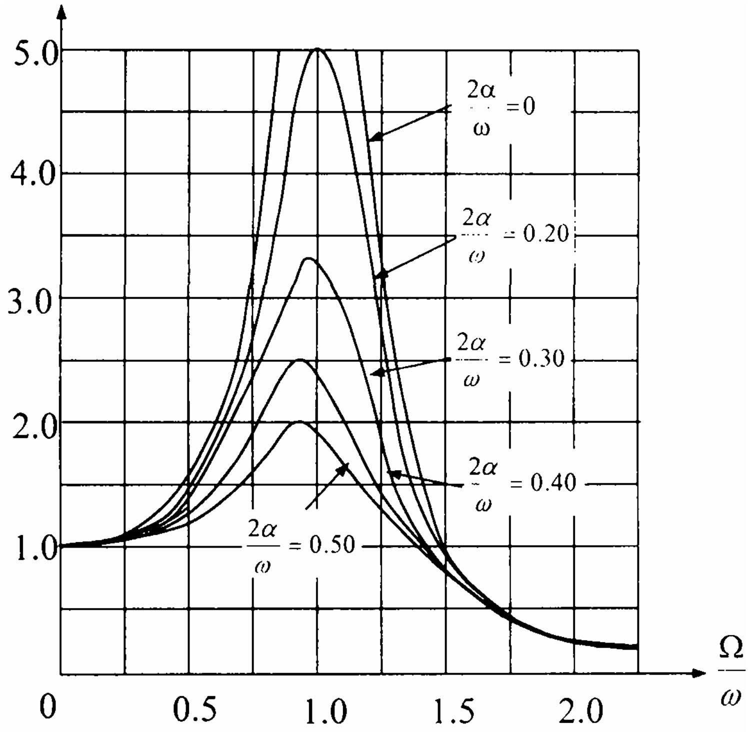
9.3.3 Hiện tượng cộng hưởng và biện pháp khắc phục

a. Hiện tượng cộng hưởng:

Từ công thức (11-50)

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}$$

Ta thấy hệ số l phụ thuộc vào 2 tỷ số là $\frac{\Omega}{\omega}$ và $\frac{2\alpha}{\omega}$. Do đó người ta có thể biểu diễn sự phụ thuộc đó trên đồ thị sau (hình vẽ). Hình vẽ biểu diễn sự liên hệ giữa k_d và $\frac{\Omega}{\omega}$ đối với mỗi giá trị của α cụ thể.



Khi tỷ số $\frac{\Omega}{\omega} = 1$ (tức là tần số lực kích thích trùng với tần số riêng của hệ) và khi $\alpha = 0$ (không có cản) thì $k_d \to \infty$. Nếu hệ số cản $a \neq 0$ thì k_d có trị số cực đại hữu hạn.

Hiện tượng tăng biên độ dao động khi tần số lực kích thích trùng với tần số riêng của hệ được gọi là ***hiện tượng cộng hưởng.***

Hiện tượng cộng hưởng rất nguy hiểm cho các chi tiết và công trình. Thực vậy, nếu $k_d \to \infty$ thì các ứng suất σ_d (hoặc τ_d) cũng cùng tiến tới ∞, trong quá trình đó nó sẽ vượt qua các giá trị ứng suất nguy hiểm σ_0 (hoặc τ_0) và làm hệ bị phá huỷ.

Do những lý do trên mà hầu hết các trường hợp trong kỹ thuật người ta tìm mọi biện pháp để khắc phục hiện tượng cộng hưởng, chỉ có một số trường hợp là lợi dụng nó (ví dụ như trong máy đầm, máy sàng...).

b. Biện pháp khắc phục hiện tượng cộng hưởng:

Thực tế thì khi tần số lực kích thích không khác nhiều so với tần số dao động riêng của hệ thì biên độ dao động đã tăng lên rõ rệt, do đó mà nó hình thành một miền cộng hưởng. Biện pháp tích cực nhất là làm sao trong quá trình thiết kế và sử dụng tần số kích thích Ω khác xa so với tần số riêng ω (Thường là $\frac{\Omega}{\omega} \le 0.7$ và $\frac{\Omega}{\omega} \ge 1.3$). Để thực hiện nguyên tắc này có thể có hai cách sau:

+ Nếu tần số riêng cố định thì có thể thay đổi nhanh tần số lực kích thích sao cho thời gian trùng của hai tần số là ngắn nhất để hiện tượng cộng hưởng không xảy ra kịp.

Đó là hiện tượng tăng tốc độ nhanh qua số vòng quay nguy hiểm của động cơ (điều này ta có thể xác định trước được).

+ Nếu tần số lực kích không thể thay đổi được (vì do động cơ chỉ có một cấp tốc độ) thì có thể thay đổi tần số riêng ω. Tức là thay đổi độ võng y_t (có thể thay đổi trọng lượng vật đặt tĩnh P = mg hoặc thay đổi độ cứng EJ của dầm).

- Biện pháp thứ hai là dùng các bộ phận giảm chấn (ví dụ như lò xo) thay thế các gối tựa cứng để phân tán năng lượng dao động và nâng cao hệ số tắt dần.

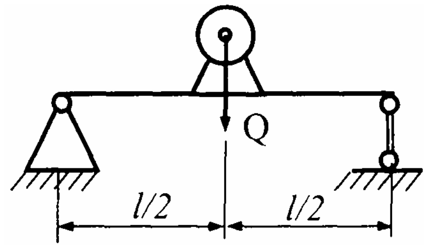
Ví du: Một động cơ có trọng lượng Q đặt giữa dầm. Xác định số vòng quay tới hạn [n] của động cơ khi nó quay với tốc độ Ω. Cho dầm có độ cứng EJ.

Giải:

Gọi [n] là số vòng quay tới hạn của động cơ cần phải xác định.

Khi cộng hưởng thí có:

$$\Omega = \omega$$



tức là:

$$\frac{\pi[n]}{30} = \sqrt{\frac{g}{y_t}}$$

hay:

$$[n] = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{y_t}}$$

Mặt khác theo phép nhân biểu đồ Vêresaghin ta có:

$$y_t = \frac{Ql^3}{48EJ}$$

vậy:

$$[n] = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{48EJ.g}{Ql^3}} \quad {}^{v}\!/_{ph}$$

9.3.4 Ví dụ về bài toán dao động hệ một bậc tự do

Bài toán: Một động cơ điện có trọng lượng là Q = 40KN được đặt trên dầm thép mặt cắt chữ I có số hiệu $N^o = 40$ ($J_x = 18940$ cm^4 và $W_x = 947$cm^3), dầm có chiều dài l = 6m. Tốc độ quay của động cơ là n = 550 v/ph. Do khối lượng lệch tâm nên khi quay môtơ sinh ra lực quán tính ly tâm trong động cơ là $P_0 = 6$KN. Tìm độ võng và ứng suất pháp cực đại trong dầm (khi tính toán bỏ qua trọng lượng bản thân dầm và lực cản của môi trường). Biết $E = 2.10^7$ N/cm.

Giải.

1. Tìm độ võng và ứng suất do trọng lượng Q có sẵn trên dầm gây ra.

Từ hình vẽ và theo phép nhân biểu đồ Vêresaghin ta tính được:

$$y_t^{(Q)} = \frac{Q.l^3}{48EJ_x} = \frac{40.10^3.600^3}{48.2.10^7.18940} = 0.475 \quad cm$$

$$\sigma_t^{(Q)} = \frac{M_{max}^{(Q)}}{W_x} = \frac{Q.l}{4W_x} = \frac{40.10^3.6.10^2}{4.947} = 633.6 \quad N/cm^2$$

2. Giả thiết biên độ lực kích thích P_0 đặt tĩnh lên dầm để tính chuyển vị y_t^* và ứng suất σ_t^* do nó gây ra.

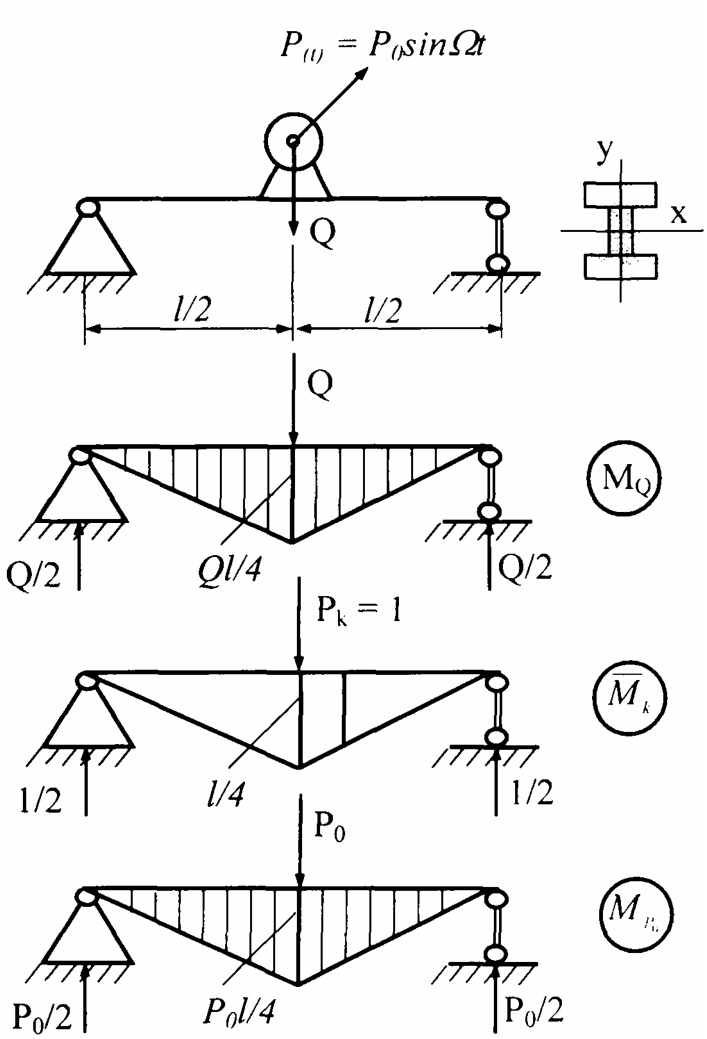
Từ hình vẽ và theo phép nhân biểu đồ Vêresaghin ta tính được:

$$y_t^* = \frac{P_0.l^3}{48EJ_x} = \frac{6.10^3.600^3}{48.2.10^7.18940} = 0.071 \quad cm$$

$$\sigma_t^* = \frac{M_{max}^{(P_0)}}{W_x} = \frac{P_0.l}{4W_x} = \frac{6.10^3.6.10^2}{4.947} = 95 \quad N/cm^2$$

3. Tính hệ số động.

Áp dụng công thức $k_d = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}$ (9-53):



Bỏ qua cản (α = 0) nên có:

$$k_d = \frac{1}{\left|1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|}$$

Tần số lực kích thích tuần hoàn:

$$\Omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{3,14.550}{30} = 57,6 \quad 1/s$$

Tần số riêng của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t^{(Q)}}} = \sqrt{\frac{981}{0,475}} = 45,5 \quad 1/s$$

Vậy có:

$$k_d = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{57,6}{45,5}\right)^2\right|} = 1,66$$

4. Tìm y_d và σ_d do biên độ lực kích thích P_0 gây ra:

$$y_d = k_d.y_t^* = 1,66.0,071 = 0,118 \quad cm$$

$$\sigma_d = k_d.\sigma_t^* = 1,66.95 = 157,7 \quad N/cm^2$$

5. Tìm độ võng và ứng suất tổng cực đại .

$$y_{max} = y_t^{(Q)} + y_d = 0,475 + 0,118 = 0,593 \quad cm$$

$$\sigma_d = \sigma_t^{(Q)} + \sigma_d = 633,6 + 157,7 = 315,4 \quad N/cm^2$$

9.4. TỐC ĐỘ TỚI HẠN CỦA TRỤC QUAY

Đối với những chi tiết máy có tốc độ quay lớn ta phải đặc biệt chú ý đến các lực ly tâm của chúng vì những lực ly tâm này có trị số đáng kể.

Trong kỹ thuật hầu hết các chi tiết máy đều có độ lệch tâm e (do trình độ kỹ thuật hoặc do cố ý tạo ra độ lệch tâm).

Xét một trục quay có mang bánh xe như hình vẽ. Bánh xe có độ lệch tâm e. Khi quay tới một tốc độ nào đó thì độ võng sẽ đạt lớn nhất và chi tiết sẽ phát sinh tiếng ồn lớn nhất. Tăng tốc độ quay quá tốc độ đó thì độ võng và tiếng ồn lại giảm đi. Do vậy mà người ta gọi tốc độ tới hạn của trục quay là tốc độ góc của trục quay làm cho trục có độ võng cực đại.

Ta cần phải xác định được tốc độ tới hạn đó để tránh trong quá trình thiết kế và vận hành máy. Gọi tốc độ góc của trục quay là Ω và m là khối lượng của bánh xe, ta có:

Lực ly tâm đặt vào khối tâm C của bánh xe là:

$$P_{lt} = m.R.\Omega^2 = m(y+e)\Omega^2 \quad (9\text{-}61)$$

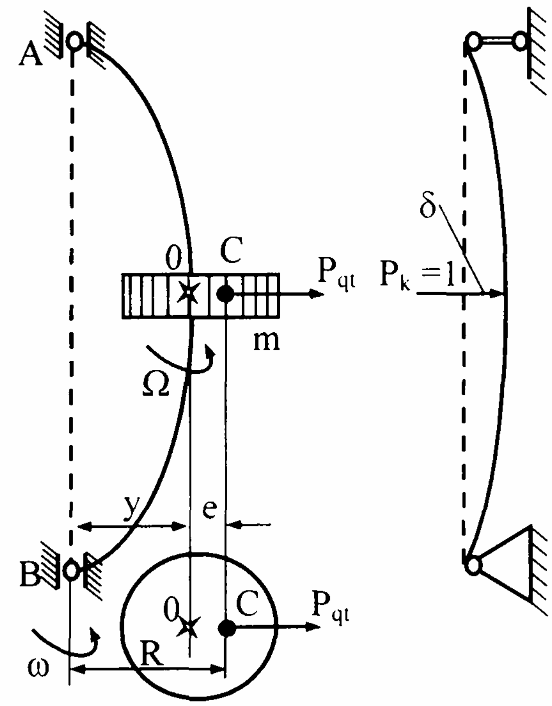
Gọi là chuyển vị do lực đơn vị $P_k = 1$ gây ra tại điểm đặt của bánh xe khối lượng m, ta có:

$$y = P_{lt}.\delta = m.\delta(y+e)\Omega^2 \qquad (9\text{-}62)$$

Suy ra:

$$y = \frac{m.\delta.e.\Omega^2}{1 - m.\delta.\Omega^2} = \frac{e.\Omega^2}{\frac{1}{m\delta} - \Omega^2} \quad (9\text{-}63)$$

Đặt: $\omega^2 = \dfrac{1}{m\delta}$ (9-64), được gọi là tần số riêng của hệ.



Vậy:

$$y = \frac{e\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad (9\text{-}65)$$

Từ biểu thức (9-65) ta thấy độ võng y đạt cực đại khi

$$\omega = \Omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}}.$$

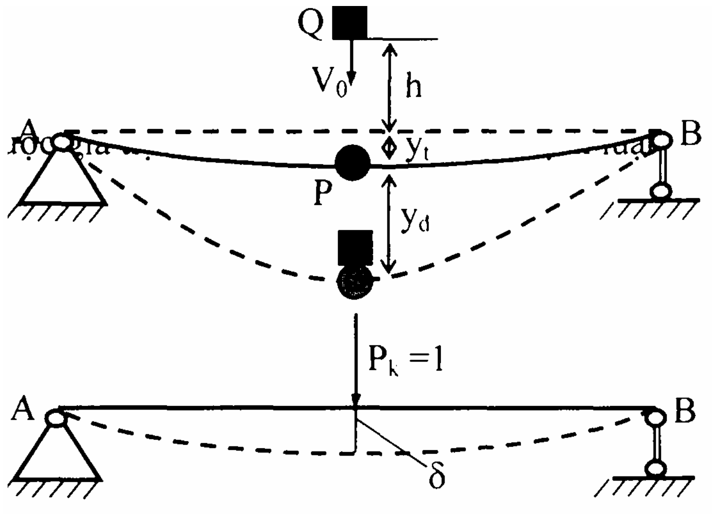
Do vậy trị số $\Omega = \sqrt{\dfrac{1}{m\delta}}$ được gọi là tốc độ góc tới hạn của trục quay mà ta cần tránh. Cũng từ (9-65) ta thấy khi tần số Ω lớn hơn rất nhiều tần số riêng ω (tức là trục quay với số vòng quay cực lớn) thì lúc đó y ≈ - e, tức là khi này tâm bánh xe trùng với trục quay. Trục quay xem như không có độ võng và chi tiết quay xem như không có độ lệch tâm và không có tiếng ồn. Đó chính là ưu việt của chi tiết máy có số vòng quay cực lớn.

9.5. BÀI TOÁN VA CHẠM HỆ ĐÀN HỒI MỘT BẬC TỰ DO

Hiện tượng va chạm là hiện tượng lực tác dụng tức thời làm vận tốc các chất điểm trong hệ đàn hồi thay đổi đột ngột, nên hệ có gia tốc lớn. Trong bài toán này, ta dựa vào định luật bảo toàn năng lượng để tìm độ võng lớn nhất, từ đó mà ta xác định được hệ số kết cho hệ.

9.5.1. Bài toán va chạm thẳng đứng hệ đàn hồi một bậc tự do

Xét một hệ đàn hồi có dạng dầm AB như hình vẽ. Giả sử có một vật trọng lượng Q rơi từ độ cao h xuống với vận tốc ban đầu là V_0 và va đập vào vật có trọng lượng là P đặt sẵn trên dầm. Sau khi rơi xuống dầm, vật trọng lượng Q gắn chặt với vật trọng lượng P và làm cho dầm có chuyển vị y_d tại chỗ xảy ra va chạm. Tìm độ võng y_d và ứng suất σ_d sau khi va chạm (khi tính toán bỏ qua trọng lượng bản thân dầm).



Gọi V là vận tốc của hai sau khi va chạm. Ta có (để tìm c bảo toàn động lượng):

Động lượng của vật Q trước va chạm là:

$$T_1 = \frac{Q}{g}.V_0 \qquad (9\text{-}66)$$

Động lượng của vật Q và P sau va chạm là:

$$T_2 = \frac{P+Q}{g}.V \qquad (9\text{-}67)$$

Nếu bỏ qua sự mất mát năng lượng lúc va chạm (sự mất mát do phát sinh nhiệt, phát sinh biến dạng tại chỗ tiếp xúc giữa Q và P khi chúng va chạm nhau) thì ta có:

$$\frac{Q}{g}.V_0 = \frac{Q+P}{g}V \qquad (9\text{-}68)$$

Suy ra:

$$V = \frac{Q}{Q+P}.V_0 \qquad (9\text{-}69)$$

Sau va chạm hai vật P và Q cùng chuyển động với vận tốc V nên chúng phát sinh động năng là:

$$T = \frac{1}{2}.\frac{P+Q}{g}.V^2 = \frac{1}{2}.\frac{P+Q}{g}.\left(\frac{Q}{Q+P}.V_0\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{Q.V_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} \qquad (9\text{-}70)$$

Mặt khác sau va chạm hai vật P và Q cùng chuyển trên đoạn đường y_d của nó và tích luỹ một năng lượng dưới dạng công thế năng:

$$A = (P+Q).y_d \qquad (9\text{-}71)$$

Theo định lý bảo toàn năng lượng thì năng lượng toàn phần được chuyển hoàn toàn thành thế năng biến dạng đàn hồi tích luỹ trong hệ (từ lúc bắt đầu va chạm cho tới lúc dừng). Do vậy nếu gọi thế năng biến dạng đàn hồi của dầm nhận được do va chạm là U, thì thế năng biến dạng U được tính theo công thức:

$$U = T + A \qquad (9\text{-}72)$$

hay:

$$U = \frac{1}{2}.\frac{QV_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} + (P+Q).y_d \qquad (9\text{-}73)$$

Ban đầu khi chưa có trọng lượng Q rơi xuống thì dầm đã có biến dạng do trọng lượng P tạo nên. Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ lúc đó là:

$$U_1 = \frac{1}{2}P.y_t \qquad (9\text{-}74)$$

Trong đó y_t là chuyển vị tĩnh do vật trọng lượng P gây ra. Gọi δ là chuyển vị do lực đơn vị $P_k = 1$ gây ra tại điểm va chạm, ta có:

$$y_t = P.\delta \ \text{ hay } \ P = \frac{y_t}{\delta} \qquad (9\text{-}75)$$

Vậy:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\delta} \qquad (9\text{-}76)$$

Tương tự như trên sau khi va chạm thì dầm có chuyển vị toàn phần là $(y_d + y_t)$. Nếu giả thiết vật liệu vẫn làm việc trong giai đoạn đàn hồi thì thế năng biến dạng đàn hồi là tích luỹ trong hệ lúc này là:

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{(y_d + y_t)^2}{\delta} \qquad (9\text{-}77)$$

Như vậy thế năng biến dạng đàn hồi mà hệ nhận do va chạm (được tính từ lúc bắt đầu va chạm cho tới lúc dừng) là:

$$U = U_2 - U_1$$

Hay:

$$U = \frac{1}{2}\frac{(y_d + y_t)^2}{\delta} - \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\delta}$$

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta} + \frac{y_d . y_t}{\delta} = \frac{y_d^2}{2\delta} + P.y_d \qquad (9\text{-}78)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng từ (9-73) và (9-78), ta có.

$$\frac{1}{2}.\frac{QV_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} + (P+Q).y_d = \frac{y_d^2}{2\delta} + P.y_d$$

$$y_d^2 - 2\delta Q.y_d - \frac{\delta Q.V_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} = 0 \qquad (9\text{-}79)$$

Đặt $y_t^* = Q.\delta$ và được gọi là chuyển vị tĩnh do trọng lượng Q giả thiết đặt tĩnh lên dầm gây ra. Thay vào biểu thức (9-79)

$$y_d^2 - 2y_t^*.y_d - \frac{y_t^*.V_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} = 0 \qquad (9\text{-}80)$$

Giải phương trình bậc hai (11-80) và loại bỏ nghiệm âm ta có nghiệm y_d:

$$y_d = y_t^* + \sqrt{(y_t^*)^2 + \frac{y_t^*.V_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g}} \qquad (9\text{-}81)$$

Hay:

$$y_d = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\left(1+\frac{P}{Q}\right).y_t^*}}\right).y_t^* \quad (9\text{-}82)$$

Đặt:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\left(1 + \frac{P}{Q}\right).y_t^*}} \quad (9\text{-}83)$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức xác định hệ số động của va chạm đứng hệ đàn hồi một bậc tự do

Từ (9-82) và (9-83) ta có:

$$y_d = k_d.y_t^* \quad (9\text{-}84)$$

Tương tự ta có công thức tính ứng suất pháp và tiếp do tải trọng va chạm trên dầm gây ra:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d.\sigma_t^* \\ \tau_d &= k_d.\tau_t^* \end{aligned} \quad (9\text{-}85)$$

**** Các trường hợp đặc biệt:***

1. Nếu vật Q rơi tự do:

Do: $V_0 = \sqrt{2gh}$ nên từ (11-83), ta có:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(1 + \frac{P}{Q}\right).y_t^*}} \quad (9\text{-}86)$$

2. Nếu vật Q rơi tự do và trên dầm không có vật P (P = 0). Từ (9-86) có:

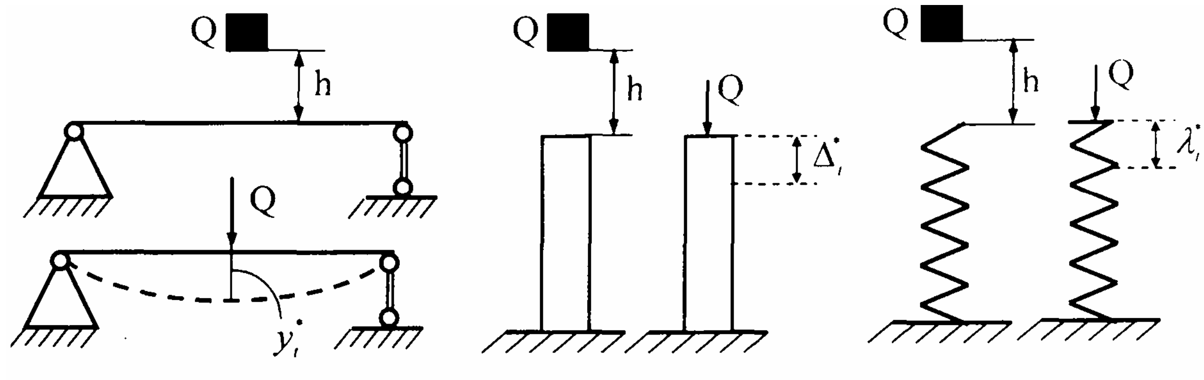
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t^*}} \quad (9\text{-}87)$$

3. Nếu Q đặt đột ngột vào dầm (h=0). Từ (9-86) có:

$$k_d = 2 \quad (9\text{-}88)$$

Chú ý:

1. Trong thực tế ta thường gặp và áp dụng công thức (9-87)



2. Các công thức trên thành lập cho trường hợp va chạm đứng gây uốn, còn trường hợp va chạm đứng gây kéo, nén hay gây xoắn trong lò xo thì ta áp dụng tượng tự. Tức là chỉ thay y_t^* của dầm bằng Δ_t^* của thanh kéo nén hoặc bằng λ_t^* của lò xo (hình vẽ).

9.5.2. Trình tự giải bài toán va chạm đứng hệ một bậc tự do

1. Coi lực Q như một lực tĩnh và đặt nó vào hệ để tính σ_t^* và y_t^* (đối với dầm); tính σ_t^* và Δ_t^* (đối với thanh chịu kéo, nén); tính τ_t^* và λ_t^* (đối với lò xo).

2. Tính hệ số kết theo công thức:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t^*}}$$

Đối với thanh chịu kéo, nén thay bằng Δ_t^* và đối với lò xo thay bằng λ_t^*).

3. Tìm ứng suất, chuyển vị (biến dạng) động.

Đối với dầm:

$$\sigma_d = k_d.\sigma_t^* \quad ; \quad y_d = k_d.y_t^*$$

Đối với thanh chịu kéo, nén:

$$\sigma_d = k_d.\sigma_t^* \quad ; \quad \Delta_d = k_d.\Delta_t^*$$

Đối với lò xo:

$$\tau_d = k_d.\tau_t^* \quad ; \quad \lambda_d = k_d.\lambda_t^*$$

9.5.3. Ví dụ về bài toán va chạm đứng

Ví dụ 1:

Một vật trọng lượng Q = 50KN rơi từ độ cao h = 30cm xuống va chạm vào giữa dầm. Dầm có mặt cắt chữ I số hiệu N° = 40 (J_x = 18940 cm^4, W_x = 947 cm^3) và có chiều dài là l = 4m. Tìm ứng suất và độ võng lớn nhất phát sinh trong dầm nếu biết mô đun đàn hồi của dầm là E = 2.10^7 N/cm^2.

Nếu thay gối tựa bên phải bằng một lò xo có độ cứng C = 10KN/cm thì ứng suất lớn nhất thay đổi như thế nào và bằng bao nhiêu?

(khi tính toán bỏ qua trọng lượng bản thân dầm).

Giải:

Khi bỏ qua trọng lượng bản thân dầm ta thấy rằng hệ đã cho có một bậc tự do.

1. Giả thiết trọng lượng Q đặt tĩnh lên dầm để tính ứng suất và chuyển vị (σ_t^* và y_t^*). Dựa vào biểu đồ mômen và phép nhân biểu đồ Vêresaghin (hình vẽ) ta có:

$$\sigma_t^* = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{50.400}{4.947} = 5,28 \quad KN/cm^2$$

$$y_t^* = \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{50.10^3.400^3}{48.2.10^7.18940} = 0,176 \quad cm$$

2. Tính hệ số k_d

- Trường hợp dầm đặt trên hai gối tựa cứng thì ta có $y_{t1}^* = y_t^* = 0,176$ cm. Do đó có:

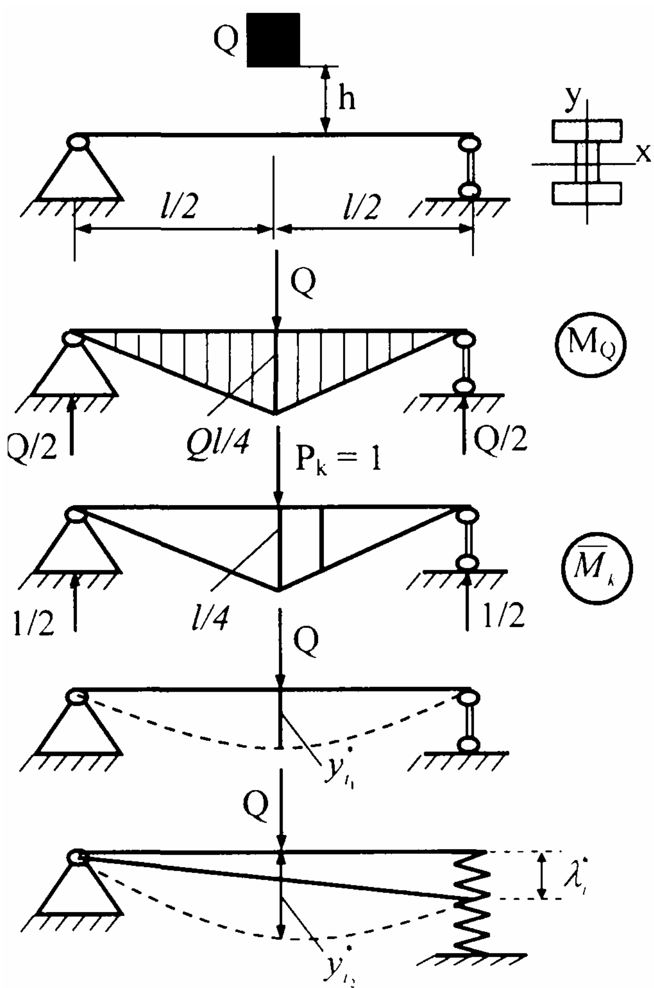
$$k_{d_1} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{t_1}^*}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.30}{0,176}} = 19,49$$

- Trường hợp dầm có gối lò xo bên phải (hình vẽ). Lúc đó có:

$$y_{t_2}^* = y_{t_1}^* + \frac{\lambda_t^*}{2}$$

Lực tác dụng vào lò xo là $P = \dfrac{Q}{2}$.

Do đó:



$$\lambda_t^* = \frac{Q}{2C} = \frac{50}{2.10} = 2,5\,cm$$

Vậy:

$$y^*_{t_2} = y^*_{t_1} + \frac{\lambda^*_t}{2} =$$
$$= 0{,}176 + \frac{2{,}5}{2} = 1{,}426\,cm$$

Cuối cùng có: $$k_{d_2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y^*_{t_2}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.30}{1{,}426}} = 7{,}56$$

3. *Tìm ứng suất động và chuyển vị động:*

- Trường hợp dầm có hai gối tựa cứng:

$$\sigma_{d_1} = k_{d_1}.\sigma^*_t = 19{,}49.5{,}28 = 102{,}9\ KN/cm^2$$
$$y_{d_1} = k_{d_1}.y^*_{t_1} = 19{,}49.0{,}176 = 3{,}43\,cm$$

- Trường hợp gối bên phải thay bằng lò xo:

$$\sigma_{d_1} = k_{d_1}.\sigma^*_t = 7{,}56.5{,}28 = 39{,}9\ KN/cm^2$$
$$y_{d_1} = k_{d_1}.y^*_{t_1} = 7{,}56.1{,}426 = 10{,}78\,cm$$

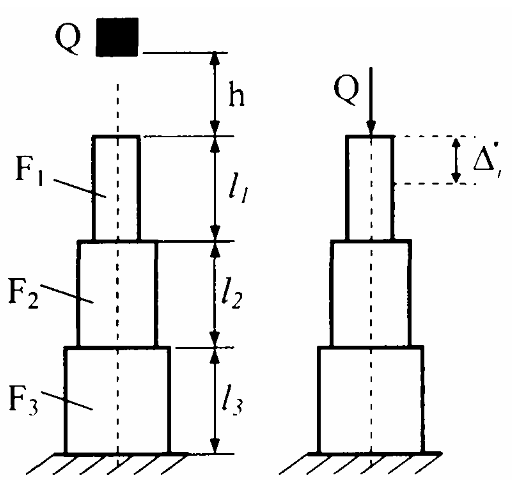
***Kết luận*:**

Khi thay một gối tựa cứng bằng một lò xo có độ cứng C = 10 KN/cm thì ứng suất động giảm đi $\frac{102{,}9}{39{,}9} \approx 2{,}58$ lần và độ võng động tăng lên $\frac{10{,}78}{3{,}43} \approx 3{,}14$ lần.

Ví dụ 2:

Một vật trọng lượng Q = 5KN rơi từ độ cao h = 30cm đập vào cột thẳng đứng, cột có chiều dài và hình dạng như hình vẽ. Tìm ứng suất động lớn nhất trong cột.

Biết*: l_1=10cm, l_2=5cm, l_3=20cm, F_1=10cm^2, F_2=20cm2, F_3=cm2, E=2.10^7 N/cm^2.*



Giải:

1. Giả thiết, trọng lượng Q đặt tĩnh lên cột và ta tính được *ứng suất và chuyển vị lớn nhất (σ_t^* và Δ_t^*), như sau:*

$$\sigma_t^* = \frac{N}{F_1} = -\frac{Q}{F_1} = -\frac{5.10^3}{10} = -500 \quad N/_{cm^2}$$

$$\Delta_t^* = \frac{N_1.l_1}{EF_1} + \frac{N_2.l_2}{EF_2} + \frac{N_3.l_3}{EF_3} = -\frac{Q.l_1}{EF_1} - \frac{Q.l_2}{EF_2} - \frac{Q.l_3}{EF_3}$$

Thay số vào ta có:

$$\Delta_t^* = -\frac{5.10^3.100}{2.10^7.10} - \frac{5.10^3.150}{2.10^7.20} - \frac{5.10^3.200}{2.10^7.30} = -60{,}4.10^{-4} \quad cm$$

2. Tính hệ số động k_d

$$k_{d_2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_t^*}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.30}{60{,}4.10^{-4}}} \approx 100{,}6$$

3. Tính ứng suất và chuyển vị động:

$$\sigma_d = k_d.\sigma_t^* = -100{,}6.500 \approx -50{,}3.10^3 \; N/_{cm^2}$$

$$\Delta_d = k_d.\Delta_t^* = -100{,}6.60{,}4.10^{-4} \approx -0{,}6 \, cm$$

9.5.4. Bài toán va chạm ngang của hệ đàn hồi một bậc tự do

Xét một hệ đàn hồi một bậc tự do chịu lực như hình vẽ. Trên dầm có gắn một vật P (bỏ qua trọng lượng của dầm). Một trọng lượng Q chuyên động với vận tốc V_o đến va chạm vào vật P có trên dầm. Sau khi va chạm thì vật Q gắn chặt với P và chúng cùng chuyển động với vận tốc giả sử là V. Khi đó có động năng của hệ là:

$$T = \frac{1}{2}\frac{(Q+P)}{g}V^2 \quad (9\text{-}89)$$

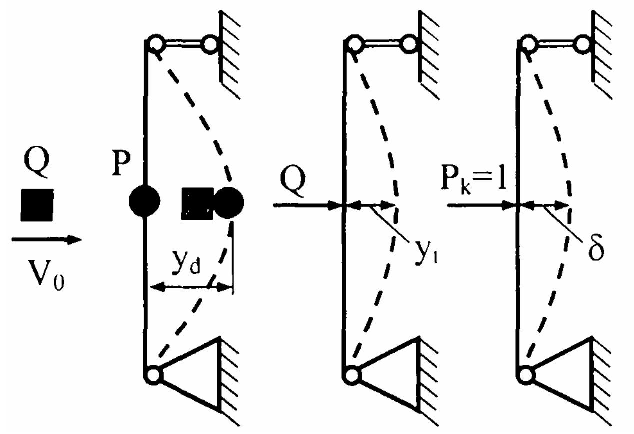
Tương tự như ở bài toán va chạm đứng theo công thức ta có:

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(Q+P)g}V_0^2 \quad (9\text{-}90)$$

Vì các khối lượng đều chuyển dời theo phương ngang nên thế năng của hệ không thay đổi nên công thế năng A bằng 0, do vậy có:

U =0020T (9-91)

Trong đó U là thế năng biến dạng đàn hồi mà hệ nhận được sau va chạm. Trong trường hợp này mặc dù có trọng lượng P đặt sẵn trên dầm nhưng do nó không gây ra chuyển vị nên thế năng biến dạng đàn hồi của hệ lúc này là bằng không.



Gọi là chuyển vị đơn vị theo phương ngang tại điểm xảy ra va chạm do lực đơn vị $P_k = 1$ đặt theo phương ngang gây ra và y_d là chuyển vị động do va chạm gây ra. Khi dầm có chuyển vị động y_d, ta có thế năng biến dạng đàn hồi của hệ là:

$$U = \frac{1}{2}\frac{y_d^2}{\delta} \qquad (9\text{-}92)$$

Từ các công thức (9-90), (9-91), (9-92), ta có:

$$\frac{1}{2}\frac{y_d^2}{\delta} = \frac{1}{2}\frac{QV_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} \qquad (9\text{-}93)$$

Gọi y_t là chuyển vị tĩnh do lực ngang đặt tĩnh và có giá trị bằng Q đặt tại điểm va chạm thì có:

$$y_t = Q\delta \Rightarrow \delta = \frac{y_t}{Q} \qquad (9\text{-}94)$$

Từ (11-93) và (11-94) có:

$$y_d^2 = \frac{y_t.V_0^2}{\left(1+\frac{P}{Q}\right)g} \qquad (9\text{-}95)$$

Hay:

$$y_d = \frac{y_t.V_0}{\sqrt{\left(1+\frac{P}{Q}\right).gy_t}} \qquad (9\text{-}96)$$

Vậy có hệ số động là:

$$k_d = \frac{y_d}{y_t} = \frac{V_0}{\sqrt{g.y_t\left(1+\frac{P}{Q}\right)}} \qquad (9\text{-}97)$$

Nếu trên dầm không có trọng lượng P đặt sẵn thì ta có:

$$k_d = \frac{V_0}{\sqrt{g.y_t}} \qquad (9\text{-}98)$$

CHƯƠNG 10

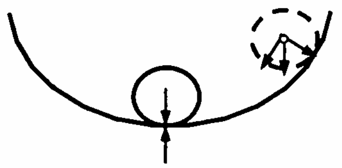
ỔN ĐỊNH

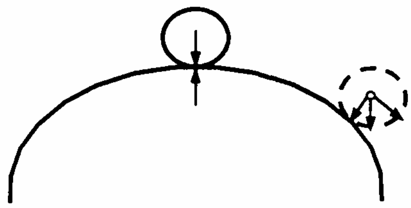
10.1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong thực tế cho thấy có nhiều bài toán việc kiểm tra bền và cứng hoàn toàn bảo đảm, song hệ vẫn bị phá huỷ, người ta gọi nguyên nhân đó là sự mất ổn định.

Ta định nghĩa một cách khái quát về độ ổn định: *Độ ổn định của hệ (kết cấu) là khả năng duy trì, bảo toàn được dạng cân bằng ban đầu trước các biến động của ngoại lực.*

Để làm rõ khái niệm này ta xét sự ổn định vị trí của vật rắn qua sự cân bằng của quả cầu ở những vị trí khác nhau trên một bề mặt:

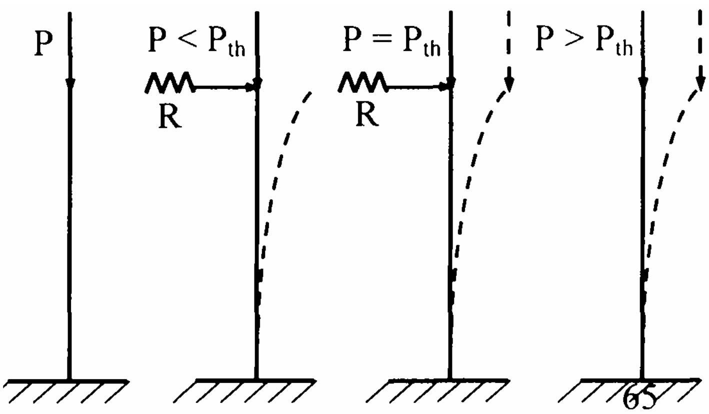




Hình 10.1a Cân bằng ổn   *Hình 10.1b Cân bằng phiếm*

Khi vật được đặt ở vị trí thấp nhất của mặt lõm thì vật ở trạng thái cân bằng ổn định, còn khi vật được đặt ở vị trí cao nhất của mặt lồi thì vật ở trạng thái cân bằng không ổn định (cân bằng phiếm định).

Hiện tượng tương tự như trên cũng xảy ra đối với trạng thái cân bằng biến dạng của hệ kết cấu. Để đơn giản ta xét một thanh có chiều dài 1, giả sử chiều dài 1 của thanh lớn hơn nhiều lần so với kích thước mặt cắt ngang của nó. Thanh bị ngàm ở một đầu còn đầu tự do chịu tác dụng bởi lực P dọc trục (thanh chịu nén đúng tâm).



Hình 10.2

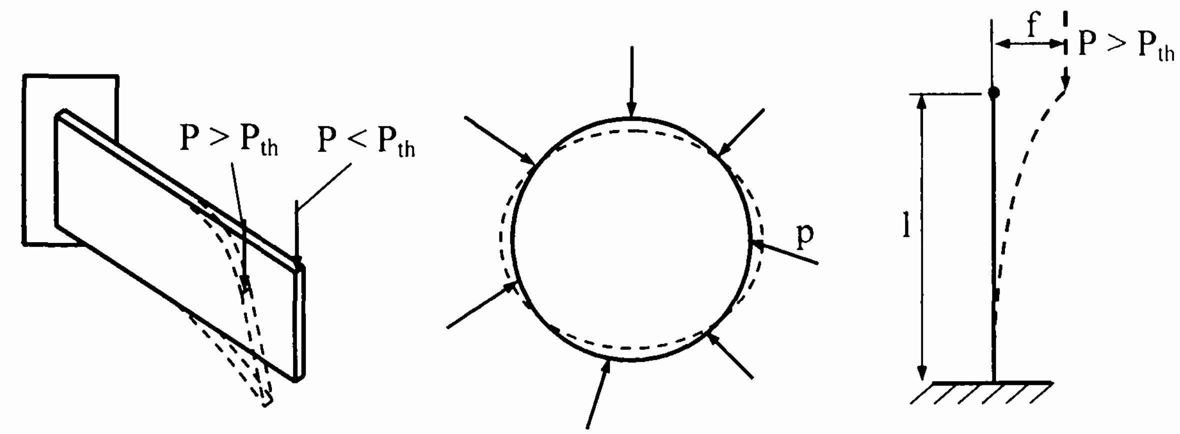
* Khi lực P còn nhỏ $P < P_{th}$ (P_{th} phụ thuộc bản chất vật liệu) thì thanh chịu nén đúng tâm. Nếu ta tác dụng vào thanh theo phương ngang lực vô cùng bé R thì thanh sẽ bị lệch khỏi vị trí cân bằng, khi bỏ lực R thanh lại trở về vị trí ban đầu. Trường hợp này ta nói thanh ở trạng thái cân bằng *ổn đinh.*

* Ta tăng dần lực P lên, khi $P = P_{th}$ thì thanh vẫn thẳng song nếu tác dụng vào thanh lực ngang R thanh sẽ bị cong đi và khi bỏ lực R thanh không trở về vị trí ban đầu nữa, ta gọi đây là trường hợp cân bằng *không ổn định* (cân bằng phiếm định). Ở

trường hợp này mặc dù vật liệu vẫn làm việc trong giai đoạn đàn hồi (Pth < pđh) nhưng thanh đang Ở trong trạng thái nguy hiểm.

* Ta tiếp tục tăng lực P, khi P > P_{th} thì không cần tác dụng lực R mà thanh vẫn bị cong đi, trường hợp này ta gọi là *sự mất ổn đinh.*

Ta có thể thấy rõ sự mất ổn định khác xảy ra của hệ đàn hồi trong các trường hợp sau:



Hình 10.3 *Hình 10.4* *Hình 10.5*

Trên hình 10.3 thanh côngxôn có mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp chịu uốn phẳng, khi P < P_{th} dầm chỉ chịu biến dạng uốn. Khi P>P_{th} thì dầm bị mất ổn định, lúc này dầm chịu uốn + xoắn.

Trên hình 10.4 Ống tròn có chiều dày chịu áp lực p đều theo phương hướng tâm từ ngoài vào, khi p > P_{th} thì ống mất ổn định và bị méo, lúc này ống ngoài chịu nén còn chịu uốn.

Khi mất ổn định (tải trọng lớn hơn tải trọng tới hạn), biến dạng của hệ tăng lên rất nhanh. Ví dụ xét thanh chịu nén như hình 10.5, ta thấy:

P = 1,010P_{th} thì f = 9%1

P = 1,015 P_{th} thì f = 22%1

Ta thấy rằng khi bị mất ổn định thì công trình làm việc ở trạng thái không bình thường và có thể bị phá hỏng. Do vậy mà khi thiết kế ngoài việc đảm bảo an toàn về độ bền và độ cứng, cần phải kiểm tra sự ổn định của chi tiết máy hay công trình, có nghĩa là phải tính sao cho tải trọng tác động nhỏ hơn tải trọng tới hạn:

$$P \leq \frac{P_{th}}{k_{\hat{o}d}} \qquad (10\text{-}1)$$

Trong đó: $k_{\hat{o}d}$ là hệ số an toàn về mặt ổn định.

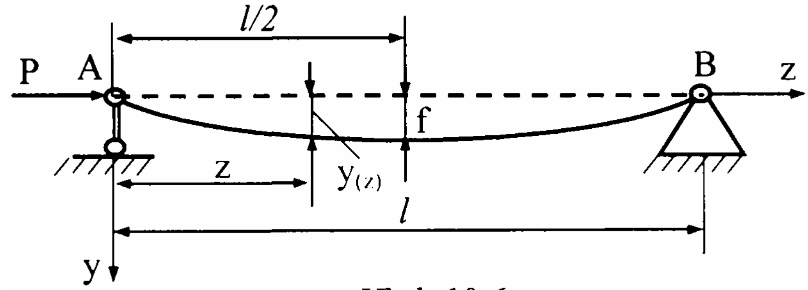
Như vậy ta thấy rằng việc giải bài toán ổn định cơ bản là tính được tải trọng tới hạn P_{th}.

10.2. BÀI TOÁN ƠLE

10.2.1 Đặt bài toán

Xét một thanh thẳng, mặt cắt ngang không đổi, liên kết khớp tại hai đầu, tại đầu có gối tựa di động đặt lực P, lực P gây nén đúng tâm. Tính lực nén đúng tâm tới hạn P_{th} với các giả thiết sau đây:

+ Ứng suất trong thanh do P_{th} gây ra chưa vượt quá giới hạn tỷ lệ



Hình 10.6

+Dưới tác dụng của P_{th} trục thanh có dạng cong với những độ võng y(z) vô cùng bé

10.2.2. Giải bài toán Ơle

Khi lực P đạt đến một giá trị tới hạn P = P_{th} thì thanh bị cong đi, ta giả sử thanh có dạng cong nào đó và nó vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Ta nhận thấy rằng giả sử nếu hai đầu gối tựa là khớp cầu thì trục thanh sẽ cong đi trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất. Vấn đề đặt ra là ta phải xác định được lực tới hạn đó.

Xét vị trí tại mặt cắt cách gối trái một đoạn z, dầm có độ võng y, bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh ta tính được mômen uốn tại mặt cắt đó là:

$$M_{(z)} = P_{th}.y_{(z)} \qquad (10\text{-}2)$$

Do hai giả thuyết nêu trên nên ta có thể sử dụng phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi của dầm chịu uốn.

$$y''_{(z)} = -\frac{M_{(z)}}{EJ_{\min}} \qquad (10\text{-}3)$$

Thay (10-2) vào (10-3), ta có: $$y''_{(z)} = -\frac{P_{th}.y_{(z)}}{EJ_{\min}} \qquad (10\text{-}4)$$

Hay: $$y''_{(z)} + \frac{P_{th}}{EJ_{\min}}.y_{(z)} = 0 \qquad (10\text{-}5)$$

Đặt: $$\alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ_{\min}} \qquad (10\text{-}6)$$

Từ (10-5) và (10-6), ta thấy phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$y''_{(z)} + \alpha^2 y_{(z)} = 0 \qquad (10\text{-}7)$$

Giải phương trình vi phân (10-7) này cho ta nghiệm tổng quát:

$$y_{(z)} = C_1 \sin\alpha z + C_2 \cos\alpha z \quad (10\text{-}8)$$

Ta nhận thấy khi bị mất ổn định, thanh bị uốn cong đi nên $y_{(z)}$ phải là hàm khác không ($y_{(z)} \neq 0$), điều kiện này cho phép ta xác định lực tới hạn P_{th}.

Trong đó C_l và C_2 là các hằng số tích phân, được xác định nhờ điều kiện liên kết tại hai đầu thanh:

Khi z = 0 thì $y = C_1.0 + C_2.l = 0$

$\Rightarrow C_2 = 0$, do vậy phương trình y có dạng:

$$y = C_1 \sin\alpha z \qquad (10\text{-}9)$$

Khi z = l thì $y = C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l = 0$

$$\Rightarrow C_1 \sin\alpha l = 0 \qquad (10\text{-}10)$$

Nếu $C_2 = 0$, $C_l = 0$ thì từ (10-8) ta có $y_{(z)} = 0$ tức là thanh vẫn thẳng, chưa bị mất ổn định. Điều này trái với điều kiện ban đầu. Vậy C_l # 0 nghĩa là:

$$\sin\alpha l = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha l = n\pi \quad (\text{với } n = 1,2,3,\ldots) \;\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l} \quad (10\text{-}11)$$

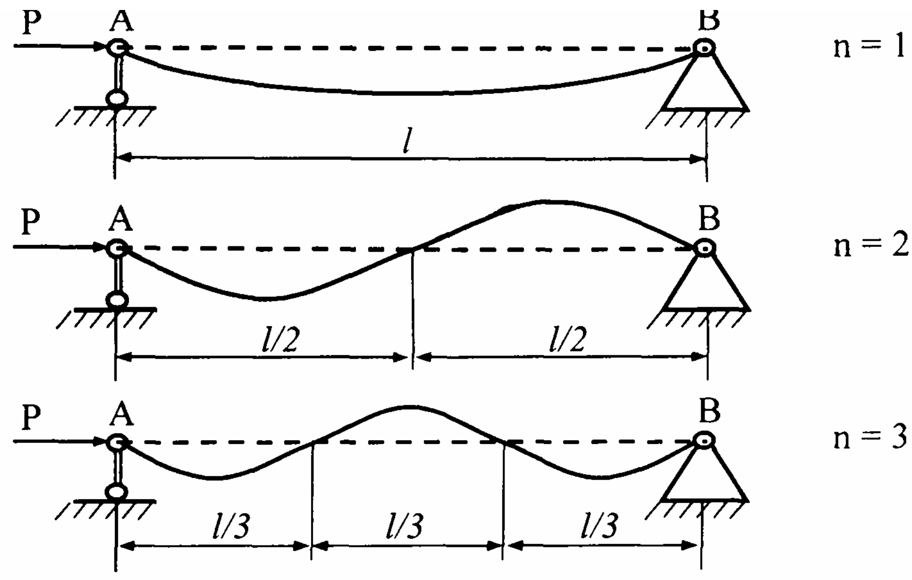
Thay (10-11) vào (10-9) có: n $y_{(z)} = C_1 \sin\frac{n\pi}{l} z$ (10-12)

Ta thấy phương trình đường đàn hồi có dạng hình sin.

Thay (10- 11) vào (10-6) ta có lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{n^2\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \qquad (10\text{-}13)$$

Với những giá trị khác nhau của n (n = 1,2,♠3 ...), lực tới hạn trong biểu thức (10- 13) có những giá trị khác nhau ứng với các dạng đường đàn hồi (10-12) khác n



Hình 10.7

Thực tế thì lực P bao giờ cũng tăng từ giá trị 0 đến những giá trị nhất định do vậy mà khi n = 1 thì P đạt giá trị là nhỏ nhất thanh đã bị mất ổn định, do vậy ta chỉ cần xét trường hợp này (n = 1). Vậy công thức xác định lực tới hạn (10- 13) có thể viết lại như sau:

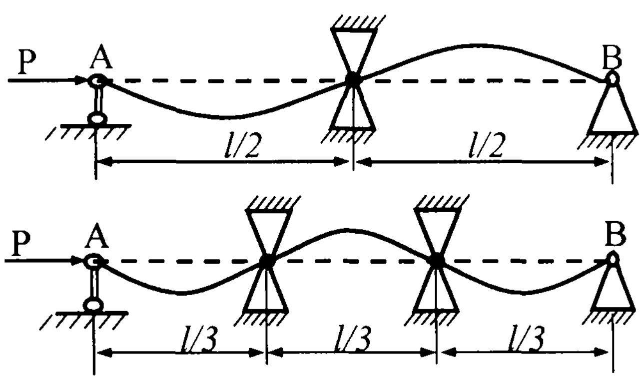
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \qquad (10\text{-}14)$$

Công thức (10 - 14) được gọi là công thức tính lực giới hạn P_{th} của Ơle

Chú ý:

Khi P có giá trị lớn hơn P_{th} tính theo (10-14) dầm có biến dạng rất lớn cho nên ta không thể dùng được phương trình gần đúng của đường đàn hồi nữa do vậy các nghiệm của phương trình (10-7*) ứng với n = 2, 3... là vô nghĩa và hằng số C_1 trong (10- 12) không xác đinh.*

Xét về lý thuyết, nếu thanh bị mất ổn định và đường đàn hồi có dạng n nửa bước sóng hình sin thì lực tới hạn P_{th} tăng n^2 lần so với giá trị lực tới hạn nhỏ nhất P_{th}^{min} *. Do Vậy thực tế để tăng tính ổn định của thanh chịu nén đúng tâm (tăng P_{th}) thì ta đặt thêm gối tựa tại các điểm uốn của đường đàn hồi, tất nhiên là số lượng gối tựa và vị trí của nó phải không*



Hình10.8

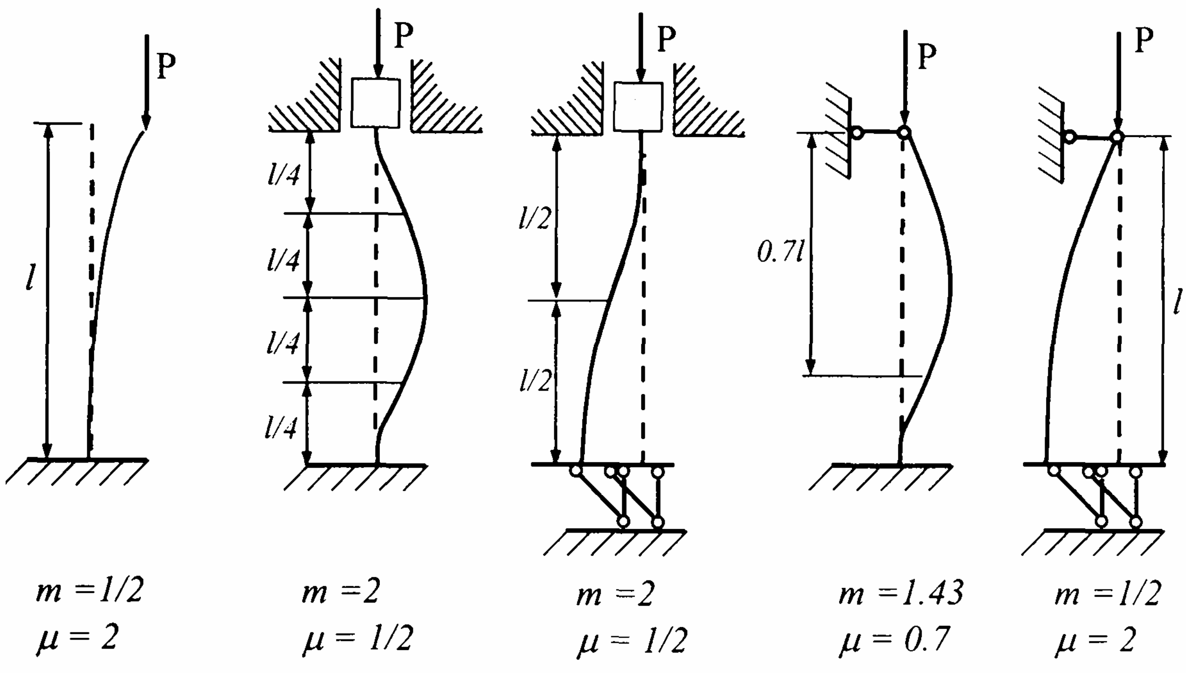
ảnh hưởng đến điều kiện làm việc bình thường của công trình. Ví dụ đối với thanh chịu nén đúng tâm được đặt lên 2 gối tựa, nếu ta đặt thêm một gối tựa tại giữa nhịp thì *lực tới hạn tăng lên gấp 4 lần và nếu ta đặt thêm 2 gối vào những điểm ở vào 1/3 nhịp thì lực tới hạn tăng lên gấp 9 lần...(hình 10.8)*

Lặp lại phép giải bài toán đã tiến hành ở trên nhưng thay đổi các liên kết của thanh, ta nhận được các công thức tính P_{th} viết dưới dạng tổng quát sau đây:

$$P_{th} = m^2 \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \qquad (10\text{-}15)$$

Hay:
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} \qquad (10\text{-}16)$$

Trong đó $m = \dfrac{1}{\mu}$ là hệ số phụ thuộc vào loại liên kết ở hai đầu thanh. Các trị số này cho trên hình 10.9



Hình 10. 9

Ta nhận thấy m chính là bằng số nửa bước sóng hình sin của đường đàn hồi khi thanh bị mất ổn định.

10.3. ỨNG SUẤT TỚI HẠN VÀ GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC ƠLE

10.3.1. Ứng suất tới hạn

Ở trên ta đã tính được lực tới hạn P_{th} thì hoàn toàn có thể tính được ứng suất tới hạn σ_{th} của thanh chịu nén.

Khi P đạt đến giá trị tới hạn $P = P_{th}$ thì thanh vẫn có dạng thẳng nên chịu nén thuần tuý, do vậy ứng suất tới hạn được tính theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2.F} \qquad (10\text{-}17)$$

hay:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2} \qquad (10\text{-}18)$$

Với: $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{F}$ hay $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$, được gọi là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang.

đặt: $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ (10-19) - Gọi là độ mảnh của thanh

ta có công thức tính ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (10\text{-}20)$$

Như vậy độ mảnh của thanh phụ thuộc vào vật liệu làm thanh (mô đun đàn hồi E của vật liệu), hình dáng mặt cắt ngang, độ dài thanh và điều kiện liên kết ở hai đầu của thanh. Trị số λ càng lớn thì thanh càng dễ mất ổn định (chính vì vậy mà người ta gọi λ là độ mảnh của thanh).

10.3.2. Giới hạn áp dụng công thức Ơle

Khi đặt bài toán Ơle ta đã giả thiết rằng khi mất ổn định vật liệu của thanh vẫn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, vì vậy các công thức (10-14) và (10-16) chỉ đúng khi ứng suất tới hạn σ_{th} nhỏ hơn ứng suất giới hạn tỷ lệ σ_{tl}

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{tl} \qquad (10\text{-}21)$$

hay:

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} = \lambda_0 \qquad (10\text{-}22)$$

Vậy điều kiện để áp dụng công thức Ơle là:

$$\lambda \ge \lambda_0 \qquad (10\text{-}23)$$

Với λ_0 là độ mảnh giới hạn áp dụng công thức Ơle, nó phụ thuộc vào vật liệu λ và λ là đại lượng không thứ nguyên

Ví dụ như đối với thép CT3 có E = $2{,}1.10^7$N/cm^2 và σ_{tl} = 21KN/cm^2 thì $\lambda_0 \approx 100$, người ta đã tính được đối với gỗ thông có $\lambda_0 \approx 75$ và đối với gang có $\lambda_0 \approx 80$.

Những thanh có $\lambda > \lambda_0$ gọi là thanh *có độ mảnh lớn*. Những thanh có $\lambda < \lambda_0$ gọi là thanh *có độ mảnh vừa và bé,* với những thanh này ta không thể áp dụng được công thức Ơle.

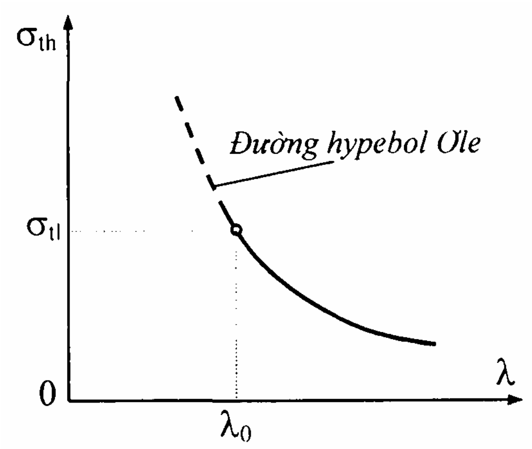
Để hiểu rõ quy luật biến thiên của σ_{th} theo λ biểu diễn mối quan hệ giữa σ_{th} và λ theo công thức (10-20). Ta vẽ được một đường hypebol mang tên Ơle (hình 10.10). Đoạn ứng dụng công thức Ơle được vẽ bằng nét đậm.

Từ đồ thị ta thấy nếu λ càng nhỏ thì σ_{th} càng lớn và nó sẽ vượt qua giới hạn đàn hồi, mà bài toán Ơle chỉ giải được trong trường hợp $\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$.

Nghĩa là đường hypebol Ơle chỉ đúng khi $\lambda \geq \lambda_0$, Trong đó λ được tính theo (10- 19) và λ_0 được tính theo (10-22).

Khi $\lambda < \lambda_0$ thì quan hệ này không còn đúng nữa (đường nét đứt).

Đối với những thanh có độ mảnh vừa và nhỏ ($\lambda < \lambda_0$) thì khi thanh bị mất ổn định vật liệu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi tức là vật liệu đã qua giới hạn tỷ lệ và đi vào miền



Hình 10.10

dẻo, miền này ứng với $\lambda > \lambda_1$ và $\lambda < \lambda_0$. Trong miền này ta sử dụng công thức thực nghiệm của Iasinski, người ta cho rằng ứng suất tới hạn trong miền dẻo σ_{th} phụ thuộc vào độ mảnh λ theo đường thẳng (Hình 10.11):

$$\sigma_{th} = a - b\lambda \qquad (10\text{-}24)$$

Với a, b là các hằng số phụ thuộc tính chất của vật liệu và được xác định bằng thực nghiệm.

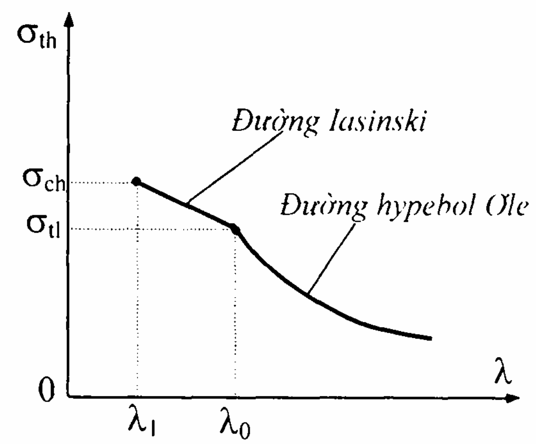
Khi $\lambda < \lambda_1$ (thanh có độ mảnh nhỏ) thì đường lasinski không còn đúng nữa, lúc này theo đồ thị hình vẽ ta chọn $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$ đối với vật liệu dẻo, còn đối với vật liệu dòn ta chọn $\sigma_{th} = \sigma_b$.

Khi biết trị số của a, b và σ_{ch} ta dễ dàng tính được λ_1 qua liên hệ (10-24) như sau:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda_1 = \sigma_{ch}$$

Hay ta có:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{ch}}{b}$$



Hình 10.11

Chú ý: *Để nắm vững các quan niệm về độ mảnh của thanh ta có quy ước:*

+ Thanh có $\lambda > \lambda_0$ là những thanh có độ mảnh lớn.

+ Thanh có $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ là thanh có độ mảnh trung bình.

+ Thanh có $0 < \lambda \le \lambda_1$ là thanh có độ mảnh nhỏ.

10.4. ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH CỦA THANH

10.4.1. Tính theo hệ số an toàn về ổn định $k_{ôđ}$

Khi bị mất ổn định thanh vẫn chịu nén đúng tâm,vậy điều kiện bền của một thanh chịu nén đúng tâm của thanh là:

$$\frac{P}{F} \le [\sigma]_n \qquad (10\text{-}25)$$

Trong đó ứng suất cho phép khi nén được xác định bằng tỷ số

$$[\sigma]_n = \frac{\sigma_0}{n} \qquad (10\text{-}26)$$

với σ_0 và n là ứng suất nguy hiểm và hệ số an toàn theo điều kiện bền.

Mặt khác thanh còn phải thanh phải thoả mãn điều kiện ổn định sau:

$$\frac{P}{F} \le [\sigma]_{ôđ} \qquad (10\text{-}27)$$

Trong đó: $[\sigma]_{ôđ}$ là ứng suất cho phép về ổn định, được xác định bằng tỷ số giữa ứng suất tới hạn σ_{th} và hệ số an toàn theo điều kiện ổn định $k_{ôđ}$:

$$[\sigma]_{ôđ} = \frac{\sigma_{th}}{k_{ôđ}} \qquad (10\text{-}28)$$

Trong biểu thức trên thì hệ số an toàn về ổn định $k_{ôđ}$ thường chọn lớn hơn hệ số an toàn về bền n, còn ứng suất tới hạn σ_{th} tính theo công thức nào ta phải tuỳ thuộc vào độ mảnh λ của bài toán, cụ thể:

+ Khi $\lambda \geq \lambda_0$ thì σ_{th} được tính theo Euler.

+ Khi $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ thì σ_{th} được tính theo Iasinski.

+ Khi $0 < \lambda \leq \lambda_1$ thì lấy $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$ đối với vật liệu dẻo và lấy $\sigma_{th} = \sigma_b$ đối với vật liệu dòn.

10.4.2. Tính theo hệ số giảm ứng suất φ

Vì điều kiện ổn định (12-27) có σ_{th} tính tùy theo độ mảnh của thanh. Do đó để giảm bớt khó khăn khi tính bài toán ổn định người ta đưa ra một phương pháp thực hành tính ổn định bằng cách lập tỷ số φ như sau:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\hat{o}d}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_0}.\frac{n}{k_{\hat{o}d}} \qquad (10\text{-}29)$$

Từ đồ thị hình 10.11 ta có $\sigma_{th} < \sigma_0$ và n < $k_{\hat{o}d}$, do đó $\varphi \leq 1$ và được gọi là hệ số giảm ứng suất (φ được tính bằng cách bảng), nó phụ thuộc vào độ mảnh vật liệu và hệ số an toàn về bền và ổn định. Vậy ta có:

$$[\sigma]_{\hat{o}d} = \varphi[\sigma]_n \qquad (10\text{-}30)$$

Vậy việc tìm ứng suất tới hạn σ_{th} bằng cách tính độ mảnh rồi đưa ra loại vật liệu và tra bảng ta sẽ tìm được φ.

Từ (1-27) và (10-30) ta có công thức kiểm tra về ổn định trong tính toán và thực hành:

$$\frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n \qquad (10\text{-}31)$$

Từ 2 biểu thức (10-25) và (10-31) ta thấy vì $\varphi \leq 1$ nên nếu điều kiện ổn định mà thoả mãn thì điều kiện bền cũng được thoả mãn. Do vậy mà khi thanh chịu nén thì chỉ cần kiểm tra điều kiện ổn định là được. Tuy nhiên nếu trên mặt cắt ngang của thanh bị suy giảm cục bộ (mặt cắt ngang bị khoét để bặt bulông hoặc đinh tán) thì sự suy giảm đó chỉ ảnh hưởng đến độ bền còn ảnh hưởng không đáng kể đến độ ổn định, do vậy mà ta phải kiểm tra điều kiện bền theo mặt cắt thực còn điều kiện ổn định chỉ cần kiểm tra với mặt cắt nguyên là được.

Trong các phần ta đã trình bày, ta chỉ xét trường hợp liên kd của thanh là như nhau trong 2 mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Ví dụ như nếu là liên kết ngàm thì theo 2 phương phải ngàm chặt, còn nếu là liên kết khớp thì phải là khớp cầu. Do vậy mà khi bị mất ổn định thanh sẽ bị cong đi trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất, trong các công thức tính toán ta sử dụng trị số mômen quán tính cực tiểu J_{min} và bán kính quán tính cực tiểu i_{min}. Ngược lại, nếu liên kết theo 2 phương không như nhau (chẳng hạn như trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất là liên kết ngàm còn trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất là liên kết khớp thì khi bị mất ổn định thanh chưa chắc đã cong trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất. Cho nên trong quá trình tính toán ta phải chú ý tính độ mảnh λ theo 2 phương, phương nào có độ mảnh λ thì phương đó sẽ bị mất ổn định. Trong các công thức tính toán ổn định ta phải dùng độ mảnh có độ cứng lớn hơn để tính.

Từ điều kiện ổn định ta có 3 bài toán tính ổn định đó là:

+ Bài toán kiểm tra độ ổn định.

+ Bài toán xác định tải trọng cho phép theo điều kiện ổn định.

+ Bài toán xác định kích thước mặt cắt ngang cho phép của thanh.

10.4.3. Trình tự giải bài toán ổn định

* Tính độ mảnh λ theo công thức (10-19)

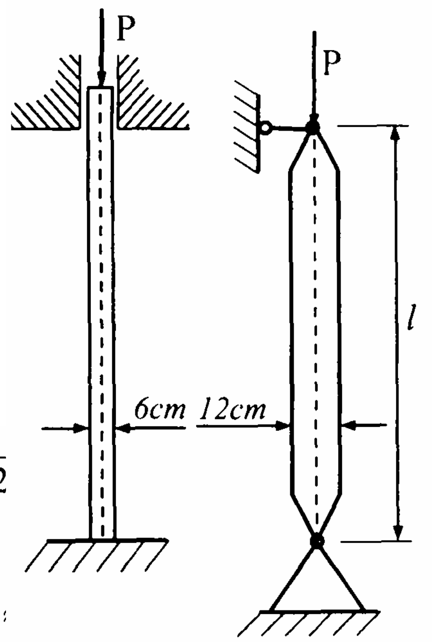
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{F}}}$$

* Nếu bài toán cho hệ số $k_{ôd}$ thì ta phải so sánh λ với λ_0 và λ_1 để tìm công thức tính ứng suất tới hạn σ_{th} rồi viết điều kiện ổn định.

* Nếu bài toán cho $[\sigma]_n$ hoặc cho σ_0 và hệ số an toàn n thì từ giá trị của độ mảnh λ ta tra bảng sẽ có được hệ số giảm ứng suất φ và tính được $\sigma_{ôd}$ theo (10-30) rồi sau đó ta viết điều kiện ổn định cho thanh.

10.4.4. Các ví dụ

. ***Ví dụ 1:*** Cho một thanh thép dài 10m, thanh có mặt cắt ngang là hình chữ nhật kích thước 6x 12cm. Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất 2 đầu là liên kết ngàm, còn trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất 2 đầu là liên kết khớp (Hình vẽ). Xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn của thanh, cho $E = 2.10^7 N/cm^2$.



Giải:

Với mặt cắt ngang của thanh có dạng hình chữ nhật, ta có các bán kính quán tính của mặt cắt là:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{J_{max}}{F}} = \sqrt{\frac{b.h^3}{12b.h}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{h.b^3}{12b.h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$$

Trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, thanh có độ mảnh là:

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{max}} = \frac{1.10}{3,46.10^{-2}} \approx 289$$

Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất, thanh có độ mảnh là:

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.10}{2.1,73.10^{-2}} \approx 288,6$$

Ta thấy rằng $\lambda_1 > \lambda_2$ nên khi bị mất ổn định thanh sẽ bị cong đi trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, do vậy mà ta sẽ dùng trị số λ_1 để tìm ứng suất tới hạn và lực tới hạn cho thanh.

Ta đã biết đối với thép có $\lambda_1 \approx 100$, như vậy trong trường hợp này có $\lambda_1 > \lambda_0$ nên ta tính ứng suất tới hạn theo công thức Euler:

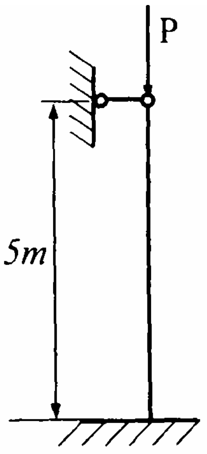
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = \frac{3,14^2.2.10^7}{289^2} \approx 2363,4\ N/cm^2$$

Vậy lực tới hạn của cột là:

$$P_{th} = \sigma_{th}.F = 2363,4.6.12 \approx 170,2\ KN$$

. ***Ví dụ 2:*** Cho một thanh thép có chiều dài 5m, một đầu liên kết ngàm còn đầu kia liên kết khớp, mặt cắt ngang của thanh hình chữ I có số hiệu N^0 40. Thanh thép được làm bằng thép số 2 có $[\sigma]_n$ = 140MN/m^2. Xác định lực nén cho phép tác động vào đầu cột.

Giải:



Với mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu N^{0}40, tra bảng có F = 71,4 cm^2, i_y=i_{min}=3,03 cm. Vì một đầu của thanh là liên kết ngàm còn đầu kia là liên kết khớp nên ta có hệ số μ = 0,75. Vậy độ mảnh λ của thanh là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7.500}{3,03} \approx 115,5$$

Tra bảng 11 -2 [2] với thép số 2 và λ = 115,5 và sau khi nội suy bậc nhất ta tìm được φ = 0,4815. Áp dụng công thức và sau khi biến đổi ta tìm được lực nén cho phép như sau:

$$[P] = \varphi.F.[\sigma]_n = 0,4815.71,4.14 \approx 481,3KN$$

. ***Ví dụ 3:*** Cho một thanh thép số 3 có mặt cắt ngang là hình chữ I số hiệu N^o 30. Ở 2 đầu thanh là liên kết khớp. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn cho thanh thép trong các trường hợp sau:

a. Thanh thép có chiều dài là 5m.

b. Thanh thép có chiều dài là 2,5m, cho biết E = 2.10^{7}N/cm^2.

Giải:

Thanh có mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu N^{0}30, nên tra bảng thép định hình ta có F = 46,5 cm^2, i_y=i_{min}=2,69 cm. Do vật liệu làm thanh là thép số 3 nên ta có độ mảnh λ= 100 và vì tại 2 đầu thanh là liên kết khớp nên có μ=1

a. Khi thanh có chiều dài là 5m thì thanh có độ mảnh là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.400}{2,69} \approx 148,7$$

Ta thấy rằng $\lambda > \lambda_0$ nên ta sẽ dùng công thức Euler (10-21) để tính ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2.2.10^7}{148,7^2} \approx 8927\ N/cm^2$$

Vậy lực tới hạn của thanh là: $P_{th} = \sigma_{th}.F = 8927.46,5 = 415,1077\ KN$

b. Khi thanh có chiều dài là 2,5m thì thanh có độ mảnh là:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1.250}{2,69} \approx 92,9$$

Ta thấy rằng $\lambda < \lambda_0$ nên ta phải dùng công thức Iasinski (10-26) để tính ứng suất tới hạn, với thép số 3 thì có a = 336 MN/m^2 và b = 1,47 MN/m^2 nên có: $\sigma_{th} = a - b\lambda = 336 - 1,47.92,9 = 199,4\ MN/m^2$

Vậy lực tới hạn của thanh là: $P_{th} = \sigma_{th}.F = 199,4.46,5.10^{-4} = 927,4\ KN$

BẢNG TRA HỆ SỐ φ

Độ mảnh λ	Trị số đối với				
	Thép số 2, 3, 4	Thép số 5	Thép CPK	Gang	Gỗ
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	0.99	0.98	0.97	0.97	0.99
20	0.96	0.95	0.95	0.91	0.97
30	0.94	0.92	0.91	0.81	0.93
40	0.92	0.89	0.87	0.69	0.87
50	0.89	0.86	0.83	0.57	0.80
60	0.86	0.82	0.79	0.44	0.71
70	0.81	0.76	0.72	0.34	0.60
80	0.75	0.70	0.65	0.26	0.48
90	0.69	0.62	0.55	0.20	0.38
100	0.60	0.51	0.43	0.16	0.31
110	0.52	0.43	0.35	--	0.25
120	0.45	0.36	0.30	--	0.22
130	0.40	0.33	0.26	--	0.18
140	0.36	0.29	0.23	--	0.16
150	0.32	0.26	0.21	--	0.14
160	0.29	0.24	0.19	--	0.12
170	0.26	0.21	0.17	--	0.11
180	0.23	0.19	0.15	--	0.10
190	0.21	0.17	0.14	--	0.09
200	0.19	0.16	0.13	--	0.08